

doi: 10.5862/MCE.53.4

Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия

*Д.ф.-м.н., профессор М.Н. Кирсанов,
Национальный исследовательский университет "МЭИ"*

Аннотация. Рассмотрена упругая пространственная статически определимая ферма регулярного типа, моделирующая прямоугольное в плане покрытие. В плоскости основания ферма имеет две оси симметрии. Четыре опоры конструкции (сферический шарнир, цилиндрический шарнир и два вертикальных стержня) расположены в ее углах.

Решена задача о действии на ферму сосредоточенной силы. Получено аналитическое решение для усилий в стержнях фермы. С помощью формулы Максвелла – Мора найдена зависимость прогиба центра фермы от пяти параметров задачи: трех линейных размеров и чисел шарниров по боковым ее сторонам. Для определения искомой закономерности средствами системы компьютерной математики Maple решалась задача рекурсии по двум параметрам.

Показано, что зависимость прогиба от числа панелей и высоты фермы обнаруживает минимум, позволяющий оптимизировать размеры конструкции.

Ключевые слова: деформации; метод индукции; пространственная ферма; покрытие

Введение

Расчет статически определимых ферм в практике проектирования имеет не только самостоятельное значение, но и является неотъемлемой частью расчета статически неопределимых конструкций и элементов конструкций. Совершенно очевидно, что в реальных проектах фермы не существуют в чистом, статически определимом виде хотя бы потому, что соединяющие шарниры не идеальны. Более того, стальные узлы чаще всего просто завариваются или сразу изготавливаются без шарнира. Кроме того, для увеличения жесткости обычно в изначальную статически определимую схему вводятся дополнительные стержни и т. д. Однако это вовсе не уменьшает значение статически определимых схем ферм. Судя по названию работы [1] («охота за схемами статически определимых ферм»), их значение только растет.

Связано это, с одной стороны, с методами расчета ферм и, прежде всего, с методом сил, где в качестве основной системы выбирается статически определимый вариант фермы. С другой стороны, статически определимые фермы сами по себе имеют преимущества, например, при монтаже и изготовлении. При неточном изготовлении элементов (а этого не избежать) в процессе монтажа не требуется усилий для подгонки размеров до нужных величин, так как в статически определимых конструкциях при отсутствии нагрузки элементы не напряжены.

Особую трудность при выборе статически определимых схем ферм вызывают пространственные конструкции [2–11], а среди них те, которые обладают свойством подобия по числу элементов и симметрией. Последние свойства связаны с регулярностью схем. Для таких схем разработан и применяется индуктивный метод получения точных аналитических решений. Аналитические же решения необходимы как тестовые для численных расчетов, а также в тех случаях, когда число стержней фермы превышает вычислительные возможности компьютерных программ, использующих численные методы решения. Неизбежное накопление ошибок округления и существенное увеличение длительности счета часто не позволяют использовать численные методы в тех случаях, когда требуется найти усилие в каком-то конкретном стержне. В некоторых решениях усилие в стержне сложной фермы может отличаться от точного не просто в каком-то разряде, но даже и знаком. Это легко проверить, например, решив в системе Maple [12] задачу о ферме с 40–50 стержнями с искусственно заниженной специально для эксперимента точностью, определяемой в системе Maple оператором **Digits**. При этом интегральные характеристики результатов счета (например, прогиб), как правило, получаются вполне удовлетворительными. Однако и здесь качество решения можно оценить по аналитическому методу, если такое решение существует. Все эти тезисы подводят к известной мысли о важности аналитических решений в виде конечной формулы.

Уже упомянутая система компьютерной математики Maple (и другие аналогичные системы, например, не менее мощная Mathematica или свободно распространяемая Maxima) позволяют получать точные решения в символьной форме. Схема составления уравнений равновесия остается такой же, как и в численных методах, а решение полученной системы линейных

уравнений осуществляется без подстановки в нее численных значений размеров и нагрузок. Таким образом, в решение эти величины входят как некоторые параметры. Однако здесь есть незаметная на первый взгляд трудность, снижающая эффект от применения систем компьютерной математики. Эта трудность – время аналитических преобразований, существенно превышающее время преобразований численных. Если ведется расчет регулярной конструкции, в которой одним из параметров выступает число некоторых периодических элементов системы (например, число панелей в плоской балочной ферме), то с увеличением этого параметра время растет так быстро, что символьный расчет как будто несложной фермы с 20 панелями занимает чрезмерно большое время. Вероятно, единственный выход из этой ситуации – воспользоваться методом индукции по параметру периодичности [13–16]. Но если для плоских и пространственных балочных конструкций такой параметр один, то для рассматриваемого в данной работе прямоугольного в плане покрытия таких параметров два – по одному по каждой из сторон фермы. При этом возникают некоторые математические трудности, преодоление которых описано ниже.

Заметим, что расчет сложной системы с большим числом стержней можно проводить, моделируя ее телом с распределенной по объему жесткостью – заменяя, например, пространственную стержневую плиту сплошной. Расчеты (в том числе в системе Maple) таких объектов известны, обоснованы и получили достаточное практическое и теоретическое подтверждение [17, 18]. Для получения интегральных характеристик исследуемого объекта (прочность, несущая способность, прогиб) этот метод вполне оправдан, удобен и точен. Для нахождения же усилия в конкретном стержне замена стержневой модели на сплошное тело не подходит. В таком случае потребуются дискретные методы.

Всякий расчет, в том числе и предлагаемый, всегда предполагает какую-то практическую цель: возможность оптимизировать конструкцию [19, 20], снизить ее вес, повысить надежность и пр. Помимо точных аналитических решений, в последнее время стали развиваться генетические методы оптимизации [21, 22].

Схема конструкции

Исследуемое покрытие представляет собой пространственную статически определимую ферму, состоящую из двух горизонтально расположенных контуров и пирамидальных куполов над ячейками нижнего контура (рис. 1–3). Нижний контур – прямоугольная решетка с ячейками (панелями) размером $a \times b$. По оси x пояс содержит n ячеек со стороной a , вдоль оси y – m ячеек размером b . Всего в нижнем контуре $N = nm$ ячеек, над каждой из которых надстроена пирамида высотой h из четырех одинаковых стержней. Верхний контур соединяет только вершины пирамид вдоль боковых сторон конструкции. В нижнем контуре $K = (n + 1)(m + 1)$ шарнирных узлов и $2N + n + m$ стержней, в верхнем – $N = nm$ узлов и $N = 2(m + n - 2)$ стержней. Если учесть $4N$ стержней пирамид, то получится, что в ферме $n_s = 6N + 3(n + m) - 4$ стержней и $n_u = N + K$ шарниров. Вместе с 7 опорными стержнями и 7 дополнительными шарнирами, которые соединяют эти стержни с основанием, получится, что число неизвестных усилий в стержнях совпадает с числом возможных уравнений равновесий узлов в проекции на три координатные оси:

$$n_s + 7 = 3(N + K). \quad (1)$$

Система статически определима. Отметим необычную для подобных систем ситуацию – ферма имеет 7 опор, в то время как в статически определимых задачах таких опор 6 (по числу степеней свободы тела в пространстве). Кроме того, в конструкции четыре вертикальные опоры, поддерживающие плоскость нижнего контура. Кажется, что одна из опор лишняя, так как плоскость определяют три точки, однако это не так. Все дело в том, что один опорный стержень взят из самой фермы. Ферма без указанных семи опор твердым (неизменяемым) телом не является. Только совместно с опорными стержнями задача получается корректно поставленной, что подтверждается тождеством (1).

Чтобы задать геометрию фермы, введем систему координат с осями x и y вдоль сторон горизонтального покрытия и вертикальной осью z . Начало координат поместим в сферической опоре. В нижнем контуре расположено $K = (n + 1)(m + 1)$ узлов с координатами

$$\bar{r}_k = [x_k, y_k, z_k] = [(i - 1)a, (j - 1)b, 0], k = i + (j - 1)(n + 1), i = 1, \dots, n + 1, j = 1, \dots, m + 1,$$

в верхнем – $N = nm$ узлов:

$$\bar{r}_k = [(i - 1/2)a, (j - 1/2)b, 0], \quad k = i + (j - 1)n + K, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m,$$

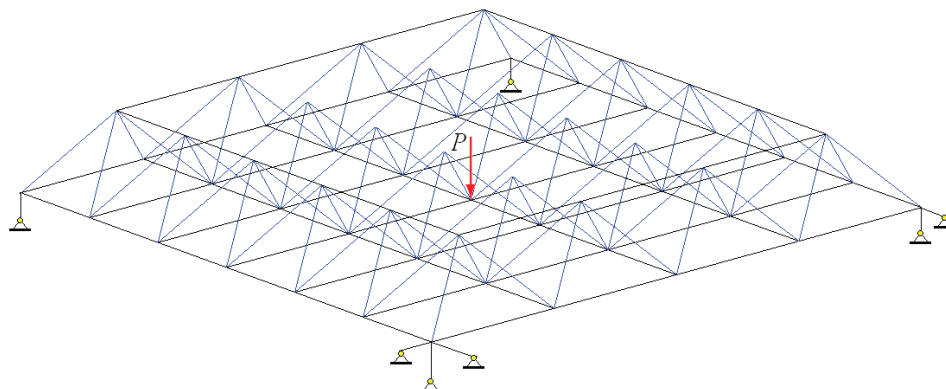


Рисунок 1. $n = 4, m = 6$

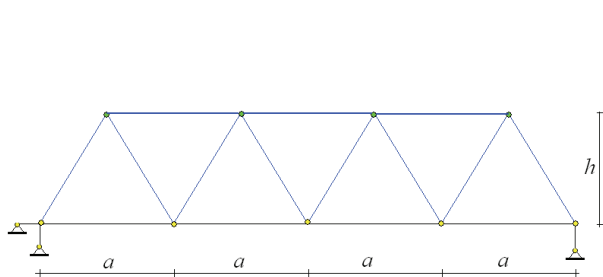


Рисунок 2. Вид сбоку, $n = 4$

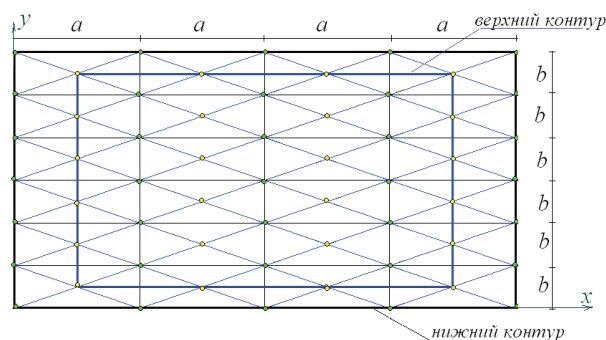


Рисунок 3. Ферма в плане, $n = 4, m = 6$

Опора – сферический шарнир – моделируется тремя стержнями, прикрепленными к узлу 1. Координаты концов этих стержней, закрепленных на земле, имеют вид:

$$\bar{r}_{k+1} = [x_1, y_1, z_1 - 1], \quad \bar{r}_{k+2} = [x_1, y_1 - 1, z_1], \quad \bar{r}_{k+3} = [x_1 - 1, y_1, z_1], \quad k = N + K.$$

Цилиндрический шарнир моделируется двумя жесткими стержнями, закрепленными в узле с номером $n + 1$

$$\bar{r}_{k+4} = [x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1} - 1], \quad \bar{r}_{k+5} = [x_{n+1}, y_{n+1} - 1, z_{n+1}],$$

И наконец, два отдельных вертикальных стержня по двум другим углам конструкции (узлы $K - n$ и K) имеют следующие координаты концов:

$$\bar{r}_{k+6} = [x_{K-n}, y_{K-n}, z_{K-n} - 1], \quad \bar{r}_{k+7} = [x_K, y_K, z_K - 1].$$

Геометрия конструкции задается также порядком соединения стержней и узлов. Для этого каждый из n_s стержней представляется условным вектором $\bar{q}_i, i = 1, \dots, n_s$, координаты которого – номера узлов, к которым он присоединен. Если проводить аналогию с теорией графов из дискретной математики, то такой способ соответствует заданию списка ребер графа. В данном случае для вычисления направляющих косинусов усилий, входящих в уравнения равновесия, этот способ наиболее удобен. Выбранные направления стержней-векторов не влияют на усилия и знаки усилий в стержнях. Вектора стержней куполов, опирающихся на нижний контур, имеют вид

$$\begin{aligned} \bar{q}_k &= [k + j - 1, k + K], & \bar{q}_{k+N} &= [k + j, k + K], \\ \bar{q}_{k+2N} &= [k + j + 1 + n, k + K], & \bar{q}_{k+3N} &= [k + j + n, k + K], \\ k &= i + (j - 1)n, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Продольные стержни решетки нижнего контура:

$$\bar{q}_{k+4N} = [k + j - 1, k + j], \quad k = i + (j - 1)n, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m + 1,$$

поперечные стержни:

$$\bar{q}_{k+5N} = [k - n, k + 1], \quad k = i + (j - 1)(n + 1) + n, \quad i = 1, \dots, n + 1, \quad j = 1, \dots, m.$$

Верхний контур, соединяющий вершины крайних пирамид, соответствует векторам стержней

$$\bar{q}_{k+6N} = [K + i, K + i + 1], \quad k = i + n + m,$$

$$\bar{q}_{k+6N} = [i + 2mn + m + 1, i + 2mn + m + 2], \quad k = i + 2n + m - 1, \quad i = 1, \dots, n - 1,$$

и

$$\bar{q}_{k+6N} = [N + in + m + 2, K + in + 1], \quad k = i + 3n + m - 2,$$

$$\bar{q}_{k+6N} = [in + K, in + K + n], \quad k = i + 3n + 2m - 3, \quad i = 1, \dots, m - 1.$$

Семь опорных стержней кодируются следующими векторами:

$$\bar{q}_{n_s+i} = [1, K + N + i], \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\bar{q}_{n_s+i+3} = [n + 1, K + N + i + 3], \quad i = 1, 2,$$

$$\bar{q}_{n_s+6} = [K - n, K + N + 6], \quad \bar{q}_{n_s+7} = [K, K + N + 7].$$

Решение

Алгоритм составления системы уравнений метода вырезания узлов основан на вычислении направляющих косинусов усилий, вычисляемых по заданным координатам, и организации их записи в матрицу G [13–16]. Уравнения равновесия сводятся к системе

$$G\bar{S} = \bar{T}, \quad (2)$$

где \bar{S} – вектор усилий в стержнях, \bar{T} – вектор нагрузок.

Рассмотрим случай четного числа узлов по каждой стороне конструкции: $m = 2m_0$, $n = 2n_0$. При этом в ферме существует геометрически центральный узел решетки нижнего контура, к которому можно приложить вертикальную (вдоль оси z) нагрузку P и проверить прогиб этого узла (рис. 1). Это простой тест проверки деформативности конструкции, позволяющий оценить ее свойства. Значение нагрузки присваивается соответствующей компоненте вектора \bar{T} . Центральный узел имеет номер $n_p = 2m_0n_0 + m_0 + n_0 + 1$. Компоненты вектора нагрузок с номерами $3i - 2$ соответствуют направлениям силы вдоль оси x , с номерами $3i - 1$ – вдоль оси y , а с номерами $3i$ – вдоль оси z . Здесь $i = 1, \dots, n_u$. Следовательно, имеем: $T_{3n_p} = -P$. Остальные компоненты вектора \bar{T} нулевые. Для уравнений равновесия потребуются проекции стержней-векторов на оси координат:

$$l_{x,i} = x_{q_{i,1}} - x_{q_{i,2}}, \quad l_{y,i} = y_{q_{i,1}} - y_{q_{i,2}}, \quad l_{z,i} = z_{q_{i,1}} - z_{q_{i,2}}.$$

Матрица направляющих косинусов G имеет компоненты:

$$G_{3q_{i,1}-2,i} = l_{x,i} / l_i, \quad G_{3q_{i,1}-1,i} = l_{y,i} / l_i, \quad G_{3q_{i,1},i} = l_{z,i} / l_i,$$

$$G_{3q_{i,2}-2,i} = -l_{x,i} / l_i, \quad G_{3q_{i,2}-1,i} = -l_{y,i} / l_i, \quad G_{3q_{i,2},i} = -l_{z,i} / l_i,$$

где $l_i = \sqrt{l_{x,i}^2 + l_{y,i}^2 + l_{z,i}^2}$. Для решения системы линейных уравнений (2) в символьном виде применим операцию вычисления обратной матрицы, имеющую в системе Maple простой вид

Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия

$G^{-1} = 1/G$. С помощью этой операции решение системы получается умножением матрицы на вектор нагрузок $\bar{S} = G^{-1}\bar{T}$. Этот простой прием не требует вызова специализированного пакета **LinearAlgebra** и сокращает время преобразований. Кроме того, при пересчете результатов для другой нагрузки нет необходимости повторного обращения матрицы, что сокращает время преобразований.

Результатом работы программы являются аналитические выражения для усилий в стержнях фермы. Для вычисления прогиба узла, к которому приложена нагрузка, воспользуемся формулой Максвелла – Мора:

$$\Delta = P \sum_{j=1}^{n_s} \frac{S_j^2 l_j}{EF}, \quad (3)$$

где E – модуль упругости стержней; F – площадь сечения стержней (одинаковые для всей конструкции); l_j и S_j – длина j -го стержня и усилие в нем от действия единичной силы, направленной вдоль P и приложенной к той же точке. Суммирование ведется по всем стержням фермы, кроме опорных, которые предполагаются жесткими: $j = 1, \dots, n_s$. Введем обозначение $\tilde{\Delta} = \Delta EF / P$. Методом индукции получим относительный прогиб верхнего узла фермы:

$$\tilde{\Delta} = \frac{A_n a^3 + B_m b^3 + C_{n,m} c^3}{16h^2}, \quad (4)$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2 + 4h^2}$, $A_n = n_0(3 - 4n_0(1 - n_0))$, $B_m = m_0(3 - 4m_0(1 - m_0))$, $C_{n,m} = 2m_0n_0 - m_0 - n_0 + 1$. Коэффициенты A_n и B_m получены в системе Maple обобщением последовательности 3, 22, 81, 415, 738, 1197, 1816... Для получения общего члена последовательности применялась функция **rgf_findrecur** из пакета **genfunc**, возвращающая рекуррентное уравнение

$$A_n = 4A_{n-1} - 6A_{n-2} + 4A_{n-3} - A_{n-4}.$$

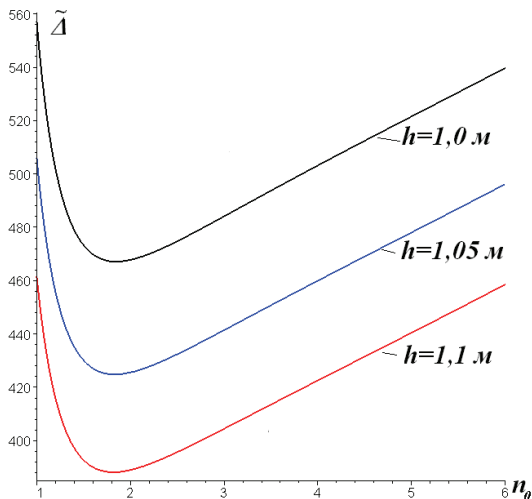
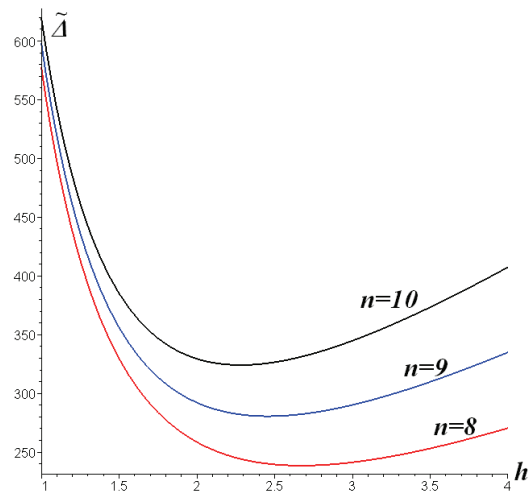
Решение этого уравнения было найдено оператором **rsolve**. Значительно более сложная процедура нахождения коэффициента $C_{n,m}$ состояла из последовательного нахождения коэффициентов $C_{n,1}, C_{n,2} \dots$ (рекурсия по n_0 при фиксированном m_0) с решением всякий раз той же задачи определения соответствующего рекуррентного уравнения, как и при нахождении коэффициентов A_n и B_m с последующим обобщением полученных зависимостей. Для обобщения применялись те же функции **rgf_findrecur** и **rsolve**. При этом использовалось очевидное условие симметрии формул по переменным a, b и m_0, n_0 .

Для квадратной в плане фермы ($a = b, m = n$) заданного размера боковой стороны ($a = L/n$) зависимость (4) относительного числа панелей n_0 обнаруживает минимум (рис. 4). Начиная с некоторого числа панелей, зависимость становится почти линейной, однако предельный анализ (команда **limit** в системе Maple) асимптоту не находит. Зависимость прогиба от высоты h также обнаруживает минимум (рис. 5, размеры в метрах). Точное аналитическое значение для минимума прогиба из условия

$$f(h) = d\tilde{\Delta} / dh = 0$$

система Maple находит, однако это выражение (один из корней кубического уравнения) получается весьма громоздким и для практического применения непригодно. Приближенное аналитическое выражение получается разложением в ряд функции с помощью оператора **series**. Корень уравнения, соответствующий минимальному прогибу, имеет вид:

$$h = \frac{L}{n_0} \left(\left(4\sqrt{2} n_0^3 + 4(1 - \sqrt{2}) n_0^2 + (3\sqrt{2} - 4) n_0 + 4 \right) / (48(2n_0^2 - 2n_0 + 1)) \right)^{1/4}.$$

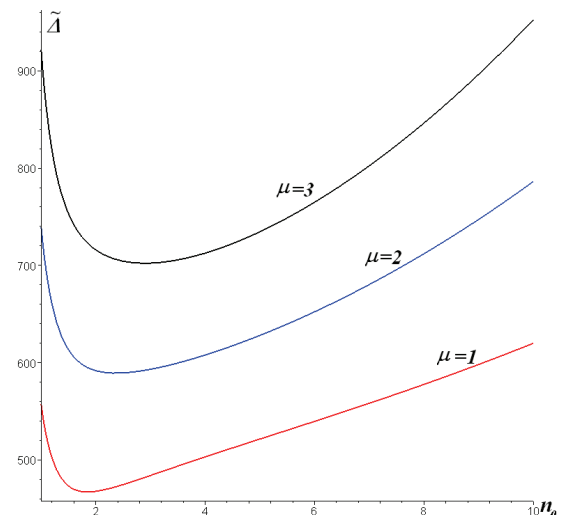
Рисунок 4. $L = 20 \text{ м}$ Рисунок 5. $L = 20 \text{ м}$

Решение (4) легко обобщается на случай, когда жесткость стержней пирамид (номера этих стержней $i < 4N$) отличается от жесткости стержней верхнего и нижнего контура. В практических задачах, как правило, контуры более жесткие, например, за счет увеличения площади сечений стержней. Пусть для жесткости стержней пирамид имеется следующее выражение: $EF_1 = EF_0 / \mu$, где EF_0 – жесткость стержней основания и $\mu > 1$.

В этом случае из (4) следует:

$$\tilde{\Delta} = \frac{A_n a^3 + B_n b^3 + \mu C_{n,m} c^3}{16h^2}.$$

На рисунке 6 построены кривые зависимости прогиба от числа панелей при фиксированной длине боковой стороны $a = n = L/n$. Как и для случая стержней одинаковой жесткости минимум приходится на те значения параметров фермы, при которых она имеет сравнительно небольшую высоту. В этом случае высота пирамидальных куполов фермы равна 1 м при основании около 5 м. Минимум прогиба линейно зависит от μ , увеличиваясь для менее жестких стержней пирамид. Значение же числа панелей, соответствующее минимуму, почти не растет.

Рисунок 6. $L = 20 \text{ м}, h = 1 \text{ м}$

Выводы

Рассмотрена пространственная конструкция фермы, моделирующая прямоугольное в плане покрытие на четырех опорах. Удалось предложить такую схему фермы, при которой статическая определимость не противоречит четырем вертикальным опорам по углам фермы. Найдено и проанализировано аналитическое решение для усилий в стержнях, а также приведена формула для прогиба при произвольных боковых размерах, числе панелей и высоте фермы. Применялся индуктивный метод, отличающийся от ранее разработанного для плоских и пространственных балочных ферм наличием двух независимых переменных. В качестве необходимого инструмента при решении задачи задействована система компьютерной математики Maple. Аналитические формулы для прогиба проанализированы на минимум, построены соответствующие графики.

Все полученные результаты можно обобщить на другие нагрузки, расположения опор и ориентацию самой фермы. Например, решение не изменится, если нижний плоский контур будет вверх, а купольные надстройки обратятся вниз. Последнее будет иметь применение для устройства крыш зданий и сооружений.

Литература

1. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Micro-architected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses // Journal of Applied Mathematical and Mechanics. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
2. Ramaswamy G.S., Eekhout M., Suresh G.R. Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames. Thomas Telford, 2002. 242 p.
3. Narayanan, S. Space Structures: Principles and Practice. Brentwood, Essex, U.K.: Multi-Science Publishing Company, 2006. 844 p.
4. Chilton J. Space Grid Structures. Woburn, MA, U.S.A. Architectural Press, 2000. 180 p.
5. Gasbarria P., Montia R., Sabatinib M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainties // Acta Astronautica. 2014. Vol. 93. Pp. 252–265.
6. Camp C. V., Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization // Engineering Structures. 2014. Vol. 62–63. Pp. 87–97.
7. Lebee A., Sab K. Homogenization of a space frame as a thick plate: Application of the Bending-Gradient theory to a beam lattice // Computers & Structures. 2013. Vol. 127. Pp. 88–101.
8. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers // Proceedings of the IASS Symposium, Valencia Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures 28 September – 2 October 2009, Universidad Politecnica de Valencia, Spain. 1997. Pp. 127–138.
9. Zhang R., Guo X., Liu Y., Leng J. Theoretical analysis and experiments of a space deployable truss structure // Composite Structures. 2014. Vol. 112. Pp. 226–230.
10. Клячин А.З. Металлические решетчатые пространственные конструкции регулярной структуры. Екатеринбург: Диамант, 1994. 276 с.
11. Марутян А.С., Григорьян М.Б., Глухов С.А. Пространственные решетчатые несущие конструкции (модули типа «Пятигорск»-2) // Строительная механика и расчет сооружений. 2014. №1. С. 64–71.
12. Голоскоков Д.П. Практический курс математической физики в системе Maple. СПб.: Изд-во ПаркКом, 2010. 644 с.
13. Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли // Инженерно-строительный журнал. 2014. №5(49). С. 37–43.
14. Кирсанов М.Н., Андреевская Т.М. Анализ влияния упругих деформаций мачты на позиционирование антенного и радиолокационного оборудования // Инженерно-строительный журнал. 2013. №5(40). С. 52–58.
15. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет пространственной стержневой системы // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2012. №1. С. 49–53.
16. Кирсанов М.Н. Аналитический расчет и оптимизация пространственной балочной фермы // Вестник МЭИ. 2012. №5. С. 5–8.
17. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. Composite Structures. 1997. Vol. 39. No. 3-4. Pp. 255–262.
18. Голоскоков Д.П. Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. №1. С. 8–14.
19. Алпатов В.Ю., Холопов И.С. Оптимизация геометрической формы пространственно-стержневых конструкций // Металлические конструкции. 2009. Т. 15. №1. С. 47–57.
20. Kaveh A., Sheikholeslami R., Talatahari S., Keshvari-Ilkhichi M. Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures // Advances in Engineering Software. 2014. Vol. 67. Pp. 136–147.
21. Кирсанов М.Н. Генетический алгоритм оптимизации стержневых систем // Строительная механика и расчет сооружений. 2010. №2. С. 60–63.
22. Kociecki M., Adeli H. Two-phase genetic algorithm for topology optimization of free-form steel space-frame roof structures with complex curvatures // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2014. Vol. 32. Pp. 218–227.

*Михаил Николаевич Кирсанов, Москва, Россия
Тел. моб.: +7(916)9055994; эл. почта: mpei2004@yandex.ru*

© Кирсанов М.Н., 2015

doi: 10.5862/MCE.53.4

Deflection analysis of rectangular spatial coverage truss

M.N. Kirsanov*National Research University "Moscow Power Engineering Institute", Moscow, Russia
+79169055994; e-mail: mpei2004@yandex.ru*

Key words

deformation; method of induction; space truss; coverage

Abstract

An elastic spatial statically determinate truss of regular type, simulating the rectangular in plan coverage was considered. In the plane of the base the truss has two axes of symmetry. Four support structures (spherical hinge, cylindrical hinge and two vertical rods) are located at its corners.

An analytic solution was found for forces in the rods of the truss. Using the Maxwell-Mohr's formula, the dependence of the deflection of the center was discovered in the truss under the influence of the concentrated force. There are five parameters of the problem in this formula: three linear dimensions, and the numbers of hinges on its lateral sides. To determine the desired patterns by means of the computer mathematics system Maple the recursion task by two parameters was solved.

It was shown that dependence of the deflection on the number of panels and height of the truss detects a minimum, allowing optimizing the size of the structure.

References

1. Hutchinson R.G., Fleck N.A. Micro-architected cellular solids – the hunt for statically determinate periodic trusses. *Journal of Applied Mathematical and Mechanics*. 2005. Vol. 85. No. 9. Pp. 607–617.
2. Ramaswamy G.S., Eekhout M., Suresh G.R. *Analysis, Design and Construction of Steel Space Frames*. Thomas Telford, 2002. 242 p.
3. Narayanan, S. *Space Structures: Principles and Practice*. Brentwood, Essex, U.K.: Multi-Science Publishing Company, 2006. 844 p.
4. Chilton J. *Space Grid Structures*. Woburn, MA, U.S.A. Architectural Press, 2000. 180 p.
5. Gasbarria P., Montia R., Sabatinib M. Very large space structures: Non-linear control and robustness to structural uncertainty. *Acta Astronautica*. 2014. Vol. 93. Pp. 252–265.
6. Camp C. V., Farshchin M. Design of space trusses using modified teaching–learning based optimization. *Engineering Structures*. 2014. Vol. 62–63. Pp. 87–97.
7. Lebee A., Sab K. Homogenization of a space frame as a thick plate: Application of the Bending-Gradient theory to a beam lattice. *Computers & Structures*. 2013. Vol. 127. Pp. 88–101.
8. Stottrup-Andersen U. Masts and Towers. *Proceedings of the IASS Symposium, Valencia Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures 28 September – 2 October 2009*, Universidad Politecnica de Valencia, Spain. 1997. Pp. 127–138.
9. Zhang R., Guo X., Liu Y., Leng J. Theoretical analysis and experiments of a space deployable truss structure. *Composite Structures*. 2014. Vol. 112. Pp. 226–230.
10. Klyachin A.Z. *Metallicheskiye reshchatyye prostranstvennyye konstruksii regulyarnoy struktury* [Metal lattice spatial structures regular structures]. Yekaterinburg: Diamant. 1994. 276 p. (rus)
11. Marutyan A. S., Grigoryan M. B., Glukhov S. A. Prostranstvennyye reshchatyye nesushchiye konstruksii (moduli tipa «Pyatigorsk»-2) [Spatial lattice girders (modules type "Pyatigorsk"-2)]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2014. No. 1. Pp. 64–71. (rus)
12. Goloskokov D.P. *Prakticheskiy kurs matematicheskoy fiziki v sisteme Maple* [Practical course in mathematical physics in the Maple]. Saint-Petersburg: Izd-vo ParkKom, 2010. 644 p. (rus)
13. Kirsanov M.N. Izgib, krucheniye i asimptoticheskiy analiz prostranstvennoy sterzhnevoy konsoli [Bending, torsion and the asymptotic analysis of the spatial core console]. *Magazine of Civil Engineering*. 2014. No. 5(49). Pp. 37–43. (rus)
14. Kirsanov M.N., Andreyevskaya T.M. Analiz vliyaniya uprugikh deformatsiy machty na pozitsionirovaniye antennogo i radiolokatsionnogo oborudovaniya [Analysis of the effect of elastic deformation of the mast antenna positioning and radar equipment]. *Magazine of Civil Engineering*. 2013. No. 5(40). Pp. 52–58. (rus)

15. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet prostranstvennoy sterzhnevoy sistemy [Analytical calculation of the spatial core system]. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2012. No. 1. Pp. 49–53. (rus)
16. Kirsanov M.N. Analiticheskiy raschet i optimizatsiya prostranstvennoy balochnoy fermy [Analytical calculation and optimization spatial truss]. *Vestnik MPEI*. 2012. No. 5. Pp. 5–8. (rus)
17. Galileev S.M., Matrosov A.V. Method of initial functions: stable algorithms in the analysis of thick laminated composite structures. *Composite Structures*. 1997. Vol. 39. No. 3–4. Pp. 255–262.
18. Goloskokov D. P. Modelirovaniye napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya uprugikh tel s pomoshchyu polinomov [Modeling of the stress-strain state of elastic bodies using polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova*. 2013. No. 1. Pp. 8–14. (rus)
19. Alpatov V. Yu., Kholopov I. S. Optimizatsiya geometricheskoy formy prostranstvenno-sterzhnevyykh konstruksiy [Optimization of the geometrical shape of space-bar structures]. *Metallicheskiye konstruksii*. 2009. Vol. 15. No. 1. Pp. 47–57. (rus)
20. Kaveh A., Sheikholeslami R., Talatahari S., Keshvari-Ilkhichi M. Chaotic swarming of particles: A new method for size optimization of truss structures. *Advances in Engineering Software*. 2014. Vol. 67. Pp. 136–147.
21. Kirsanov M.N. Geneticheskiy algoritm optimizatsii sterzhnevyykh sistem [Genetic algorithm optimization of core systems]. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2010. No. 2. Pp. 60–63. (rus)
22. Kociecki M., Adeli H. Two-phase genetic algorithm for topology optimization of free-form steel space-frame roof structures with complex curvatures. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2014. Vol. 32. Pp. 218–227.

Full text of this article in Russian: pp. 32–38