Задачи устойчивости для стержней и пластин

Д.т.н., научный руководитель проекта И.Д. Евзеров,
ООО «ПРАЙМ КАД»

Аннотация. Рассмотрены задачи устойчивости для стержней и пластин. Используются вариационные формулировки задачи устойчивости. Исследуется положительная определенность функционала потенциальной энергии. Выполнен переход от трехмерной задачи устойчивости к соответствующим задачам для стержней и пластин.

Использованы представления перемещений по сечению стержня и толщине пластины для геометрически нелинейных задач. Эти представления получены из предположений о равенстве нулю деформаций в плоскости сечения стержня или по толщине пластины. Вычислены вторые вариации нелинейных деформаций. Выполнено интегрирование по сечению стержня и толщине пластины. Применены известные формулы для усилий и уравнения равновесия. Получены функционалы устойчивости для стержней и пластин.

Проведено сравнение с известными ранее результатами. Приведено решение тестовой задачи для центрально сжатого консольного стержня с сечением Пи, которая моделировалась пластинами.

Ключевые слова: задачи устойчивости; стержни и пластины; вариационные формулировки

Введение

Исследование устойчивости конструкций является одним из основных этапов расчета. Особого внимания требуют стержневые и пластинчатые элементы. Уравнения для стержней и пластин получают из трехмерной задачи, используя представления перемещений по сечению стержня и толщине пластины. Применяются гипотезы плоских сечений для стержней [1, 2], прямых нормалей для пластин и оболочек [3, 4], методы разложения по малому параметру [5–8] и другие асимптотические методы [9, 10, 11]. В работах [12–15] исследуется устойчивость стержней переменного сечения. В работах [16, 17] приведены многочисленные примеры ошибок, возникающих при расчетах устойчивости.

Целью работы является построение представлений перемещений по сечению стержня и толщине пластины, обеспечивающих равенство соответствующих элементов нелинейного тензора деформаций нулю, переход от трехмерной задачи устойчивости к соответствующим задачам для стержней и пластин и вычисление функционалов.

Обозначения

Ω – область, занимаемая конструкцией;

$x=(x_1,x_2,x_3)$ – вектор независимых переменных;

$U(x)$ -вектор – функция перемещений, $U=(U_1,U_2,U_3)$;

u -вектор – функция перемещений стержня или пластины, $u=(u_1,u_2,u_3)$;

α -вектор – функция поворотов стержня или пластины, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$;

f – правая часть, $f=(f_1,f_2,f_3)$;

A,l – сечение и длина стержня, δ – толщина пластины;

d^2 – вторая вариация;

σ_{ij}, $e_{ij}(U)$ – напряжения и нелинейные деформации.

Предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Для стержней штрихом обозначаем дифференцирование по x_1.

Трехмерная задача устойчивости

При решении задачи устойчивости недеформированной схемы в линеаризованной постановке исследуется [18, 19] положительная определенность функционала:

$$a(U)+b(U)+f(U),$$

где $a(U)$ – функционал работы внутренних сил линейной задачи;

$$f(U)=\int_{\Omega} f_i d^2U_i dx; \tag{1}$$

$$b(U)=\int_{\Omega} \sigma_{ij} d^2 e_{ij}(U)dx; \tag{2}$$

$$e_{ij}(U)=(\partial U_i/\partial x_j+\partial U_j/\partial x_i+\partial U_k/\partial x_i\partial U_k/\partial x_j)/2. \tag{3}$$

В работе [20] показано, что слагаемые $\sigma_{ii}(\partial U_i/\partial x_i)^2$ в формуле (2) малы по сравнению с соответствующими величинами, входящими в $a(U)$, поэтому в дальнейшем они не учитываются.

Представление перемещений по сечению стержня и преобразование функционалов

Предполагаем, что:

1) сечение остается плоским;
2) деформации в плоскости сечения равны нулю, $e_{22}(U)=e_{33}(U)=e_{23}(U)=0$;
3) линейные по u_1,u_2,u_3,α_1 слагаемые – такие же, как в геометрически линейном случае.

Из 1) следует, что

$$U_i(x)=u_i+x_2B_i+x_3C_i. \tag{4}$$

Из 2) следует, что

$$B_1^2+(1+B_2)^2+B_3^2=1,\ C_1^2+C_2^2+(1+C_3)^2=1,$$
$$B_1C_1+(1+B_2)C_2+B_3(1+C_3)=0. \tag{5}$$

Из 3) следует, что

$$B_1=-u_2'+b_1,\ C_1=-u_3'+c_1,\ B_3=\alpha_1+b_3,\ C_2=-\alpha_1+c_2,\ B_2=b_2,\ C_3=c_3. \tag{6}$$

Подставив (6) в формулу (5) и приравняв нулю квадратичные слагаемые, получим:

$$2b_2+(u_2')^2+\alpha_1^2=0,\ 2c_3+(u_3')^2+\alpha_1^2=0,\ c_2+b_3+u_2'u_3'=0. \tag{7}$$

Приравняв нулю кубичные слагаемые, получим:

$$-2u_2'b_1+2\alpha_1b_3=0,\ -2u_3'c_1-2\alpha_1c_2=0,\ -u_3'b_1-u_2'c_1+\alpha_1(c_3-b_2)=0. \tag{8}$$

Из (4)–(8) следует представление перемещений по сечению:

$$U_1(x)=u_1-x_2\alpha_3+x_3\alpha_2+(x_2\alpha_1\alpha_2+x_3\alpha_1\alpha_3)/2;$$
$$U_2(x)=u_2-x_3\alpha_1-x_2(\alpha_1^2+\alpha_3^2)/2+x_3\alpha_2\alpha_3/2; \tag{9}$$
$$U_3(x)=u_3+x_2\alpha_1+x_2\alpha_2\alpha_3/2-x_3(\alpha_1^2+\alpha_2^2)/2,$$

где использованы обозначения $-u_3'=\alpha_2$, $u_2'=\alpha_3$, функции u_i,α_i зависят только от x_1.

Введем стандартные обозначения для внутренних сил и моментов и внешних моментов [1]:

$$N_i = \int_A \sigma_{1i} dA\,;$$

$$M_1 = \int_A (x_2\sigma_{13} - x_3\sigma_{12}) dA\ ,\ M_2 = \int_A x_3\sigma_{11} dA\ ,\ M_3 = -\int_A x_2\sigma_{11} dA\,;$$

$$m_2 = \int_A x_3 f_1 dA\ ,\ m_3 = -\int_A x_2 f_1 dA\,.$$

Предполагаем, что

$$\int_A x_2 f_2 dA = \int_A x_3 f_3 dA = \int_A (x_3 f_2 + x_2 f_3) dA = 0\,.$$

Справедливы уравнения равновесия [1]:

$$M_2' - N_3 = -m_2\ ,\ M_3' + N_2 = -m_3\,. \qquad (10)$$

Из (1), (9) получим:

$$f(U) = \int_l (m_2\alpha_1\alpha_3 - m_3\alpha_1\alpha_2) dx_1 / 2\,.$$

Дифференцируя формулу (9) с учетом равенств $-u_3' = \alpha_2$, $u_2' = \alpha_3$, получим:

$$\begin{gathered} d^2 e_{11}(U) = [(\alpha_3 - x_3\alpha_1')^2 + (-\alpha_2 + x_2\alpha_1')^2 + x_2(\alpha_1\alpha_2)' + x_3(\alpha_1\alpha_3)']/2\,; \\ d^2 e_{12}(U) = [-x_3(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_2]/2\,; \\ d^2 e_{13}(U) = [x_2(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) - \alpha_1\alpha_3]/2\,. \end{gathered} \qquad (11)$$

Интегрируя по сечению и пользуясь уравнениями (10), получим:

$$\begin{gathered} b(U) + f(U) = \int_l [N_1(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) - 2(M_2\alpha_1)'\alpha_3 + 2(M_3\alpha_1)'\alpha_2 + M_1(\alpha_2'\alpha_3 - \alpha_3'\alpha_2) + \\ (N_1 r^2 + M_2 I_{32} - M_3 I_{23})\alpha_1^2 + 2m_2\alpha_1\alpha_3 - 2m_3\alpha_1\alpha_2 + (M_2\alpha_1\alpha_3)' - (M_3\alpha_1\alpha_2)']dx_1/2 \end{gathered}\ , \qquad (12)$$

где $r^2 = (I_2 + I_3)/A$;

$$I_2 = \int_A x_3^2 dA\,;$$

$$I_3 = \int_A x_2^2 dA\,;$$

$$I_{32} = \int_A x_3(x_2^2 + x_3^2) dA / I_2\,;$$

$$I_{23} = \int_A x_2(x_2^2 + x_3^2) dA / I_3\,.$$

Первое слагаемое в (12) – изгиб от сжатия, четвертое – изгиб от кручения, пятое – кручение от сжатия, остальные – кручение от изгиба.

Функционал (12) отличается от приведенного, например, в работе [21] наличием последних четырех слагаемых, которые обусловлены квадратичными по поворотам слагаемыми в (9).

Последние два слагаемых получены другим методом в работе [20].

Второе слагаемое следует вводить в (12) только для тонкостенных стержней, когда функционал $a(U)$ работы внутренних сил содержит под интегралом слагаемое $EI_\omega(\alpha_1'')^2$.

Для тонкостенных стержней полагаем [22, 23, 24]: $\alpha_2 = -u_3' + x_2^0\alpha_1', \alpha_2 = u_2' + x_3^0\alpha_1'$, x_2^0, x_3^0 – координаты центра кручения.

Представление перемещений для пластин и преобразование функционалов

Используется аналогичное (9) представление перемещений по толщине [25]:

$$U_1(x) = u_1 + x_3\alpha_2 + x_3\alpha_1\alpha_3/2;$$
$$U_2(x) = u_2 - x_3\alpha_1 + x_3\alpha_2\alpha_3/2; \quad (13)$$
$$U_3(x) = u_3 - x_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)/2;$$

функции u_i, α_i зависят только от x_1, x_2.

Квадратичные по поворотам слагаемые в (13) обеспечивают равенство $e_{33}(U) = 0$.

Введем стандартные обозначения для внутренних сил и моментов и внешних моментов [3]:

$$N_{ip} = -\int_\delta \sigma_{ip}dx_3,\ M_{pq} = -\int_\delta x_3\sigma_{pq}dx_3,$$
$$m_2 = \int_\delta x_3 f_1 dx_3,\ m_1 = -\int_\delta x_3 f_2 dx_3.$$

Интегралы берутся по толщине пластины.

Справедливы уравнения равновесия [3]:

$$\partial M_{1p}/\partial x_p - N_{31} = -m_2,\ \partial M_{2p}/\partial x_p - N_{32} = m_1. \quad (14)$$

Из (1) и (13) получим

$$f(U) = \int_\Omega (m_2\alpha_1\alpha_3 - m_1\alpha_2\alpha_3)dx_1\mathrm{dx}_2/2.$$

Дифференцируя (13) с учетом равенств $\partial u_3/\partial x_2 = \alpha_1, \partial u_3/\partial x_1 = -\alpha_2$, получим:

$$d^2e_{11}(U) = [(\partial u_2/\partial x_1 - x_3\partial\alpha_1/\partial x_1)^2 + \alpha_2^2 + x_3\partial(\alpha_1\alpha_3)/\partial x_1]/2;$$
$$d^2e_{22}(U) = [(\partial u_1/\partial x_2 + x_3\partial\alpha_2/\partial x_2)^2 + \alpha_1^2 + x_3\partial(\alpha_2\alpha_3)/\partial x_2]/2;$$
$$d^2e_{12}(U) = [(\partial u_1/\partial x_1 + x_3\partial\alpha_2/\partial x_1)(\partial u_1/\partial x_2 + x_3\partial\alpha_2/\partial x_2) + (\partial u_2/\partial x_1 - x_3\partial\alpha_1/\partial x_1)\cdot (\partial u_2/\partial x_2 - x_3\partial\alpha_1/\partial x_2) + \alpha_1\alpha_2 + x_3(\partial(\alpha_1\alpha_3)/\partial x_2 + \partial(\alpha_2\alpha_3)/\partial x_1)]/2; \quad (15)$$
$$d^2e_{13}(U) = -\alpha_1\partial u_2/\partial x_1 + \alpha_1\alpha_3/2;$$
$$d^2e_{23}(U) = \alpha_2\partial u_1/\partial x_2 + \alpha_2\alpha_3/2.$$

Интегрируя по толщине и пользуясь (14), получим:

$$b(U) + f(U) = \int_\Omega [N_{pq}\partial u_3/\partial x_p\partial u_3/\partial x_q + N_{11}(\partial u_2/\partial x_1)^2 + N_{22}(\partial u_1/\partial x_2)^2 +$$
$$N_{12}(\partial u_1/\partial x_1\partial u_1/\partial x_2 + \partial u_2/\partial x_1\partial u_2/\partial x_2) +$$
$$2\partial(M_{1p}\alpha_1)/\partial x_p\partial u_2/\partial x_1 - 2\partial(M_{2p}\alpha_2)/\partial x_p\partial u_1/\partial x_2 +$$
$$2(m_2\alpha_1\alpha_3 - m_1\alpha_2\alpha_3) - \partial(M_{pq}\alpha_p\alpha_3)/\partial x_q]dx_1\mathrm{dx}_2/2 \quad (16)$$

Последнюю сумму можно преобразовать к интегралу по границе. Первая сумма в (16) – изгиб от сжатия, три последние – влияние изгиба. Слагаемые, содержащие α_3, следует вводить в (16) только в том случае, когда функционал $a(U)$ работы внутренних сил содержит под интегралом слагаемое [26]:

$$G\delta(\alpha_3 - (\partial u_2 / \partial x_1 - \partial u_1 / \partial x_2)/2)^2. \qquad (17)$$

При использовании метода разложения по малому параметру (толщине) в работах [7, 8] слагаемые

$$N_{11}(\partial u_2 / \partial x_1)^2 + N_{22}(\partial u_1 / \partial x_2)^2 + N_{12}(\partial u_1 / \partial x_1 \partial u_1 / \partial x_2 + \partial u_2 / \partial x_1 \partial u_2 / \partial x_2) \qquad (18)$$

приняты малыми. Однако они также существенны. Например, задачи устойчивости центрально сжатых стержней с сечениями – Пи, двутавр, Зет и т. д. – можно моделировать и пластинами. Если в (16) не учитывать слагаемые (18), критическая сила увеличивается на 30–50%. Наиболее характерный пример – стальной консольный стержень с сечением Пи, высота стенок – 96 мм, ширина нижних полок –23 мм, ширина верхней полки – 56 мм, толщина стенок и полок – 4 мм. Аналитическое решение приведено в работе [27]. При моделировании пластинами с учетом (18) первая критическая сила равна 5.77 т. Близкие результаты получены при моделировании стержнями и трехмерными элементами. При моделировании пластинами без учета (18) первая критическая сила равна 9.11 т.

Представленные результаты внедрены в программном комплексе ЛИРА10, который широко применяется для расчета строительных конструкций. В работе [28] приведены решения тестовых задач устойчивости, полученные в ПК ЛИРА10, и сравнение с аналитическими решениями.

Выводы

1. Получены представления перемещений по сечению стержня и толщине пластины для геометрически нелинейных задач.

2. Выполнен переход от вариационной постановки трехмерной задачи устойчивости к соответствующим задачам для стержней и пластин.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 246 с.
2. Сливкер В.И. Строительная механика. Вариационные основы. М.: АСВ, 2005. 708 с.
3. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. 383 с.
4. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. М.: Судпромгиз, 1962. 344 с.
5. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 475 с.
6. Гольденвейзер А.Л. Алгоритмы асимптотического построения линейной двумерной теории тонких оболочек и принцип Сен-Венана // Прикладная математика и механика. 1994. Т. 58. Вып. 6. С. 96–108.
7. Сьярле Ф., Рабье П. Уравнения Кармана. М.: Мир, 1983. 172 с.
8. Ciarlet P.G. Mathematical elasticity. Theory of plates. Amsterdam: Elsevier, 1997. 497 p.
9. Назаров С.А. Асимптотический анализ тонких пластин и стержней. Новосибирск: Научная книга, 2002. 406 с.
10. Bauer S.M., Filippov S.V., Smirnov A.L., Tovstich P.E. Asymptotic methods in mechanics with application to thin plates and shells // Asymptotic Methods in Mechanics & Lecture Notes. 1993. Vol. 3. Pp. 3–141.
11. Miara B. Justification of the asymptotic analysis of elastic plates // Applicable Analysis. 1989. Vol. 31. Pp. 291–307.
12. Cywiński Z. Formänderungsgrössenverfahren mittig gedrückter dünnwandiger Stäbe mit einfach- und doppeltsymmetrischen offen Querschnitten // Stahlbau. 2005. No. 12. Pp. 916–924.
13. Coşkun S.B. Analysis of tilt-buckling of Euler columns with varying flexural stiffness using homotopy perturbation method // Mathematical Modeling and Analysis. 2010. Vol. 15. No. 3. Pp. 275–286.

14. He J.-H. Recent development of the homotopy perturbation method // Topological Methods in Nonlinear Analysis. 2008. Vol. 31. No. 2. Pp. 205–209.

15. Atey M.T. Determination of critical buckling loads for variable stiffness Euler columns using homotopy perturbation method // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2009. Vol. 10. No. 2. Pp. 199–206.

16. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Некоторые ошибки в постановке и решении задач устойчивости равновесия конструкций // Труды международной научно-технической конференции «Вычислительная механика деформируемого твердого тела». Т.2. М., 2006. С. 316–323.

17. Perelmuter A.V., Slivker V.I. On an Error of Mysterious Nature that happens in Software when Analyzing Mechanical Systems for Buckling // Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computer Mechanics. Aalborg, Denmark. 18–19 October. Denmark: Aalborg University, 2002. Pp. 229–232.

18. Болотин В.В. О вариационных принципах теории упругой устойчивости // Проблемы механики твердого деформируемого тела. Л.: Судостроение, 1973. С. 83–88.

19. Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике // Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Стройиздат, 1965. С. 6–27.

20. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. М.: СКАД СОФТ, 2009. 704 с.

21. Васидзу К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. М.: Мир, 1987. 542 с.

22. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни (прочность, устойчивость, колебания). М.: Госстройиздат, 1940. 276 с.

23. Лалин В.В., Рыбаков В.А., Морозов С.А. Исследование конечных элементов для расчета тонкостенных стержней // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 53–73.

24. Anwer Ali B., Saad S., Osman M., Ahmad Y. Finite Element Analysis of Cold-formed Steel Connections // International Journal of Engineering (IJE). 2011. Vol. 5. No.2. Pp. 55–61.

25. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. Киев: Факт, 2007. 393 с.

26. Wilson E.L., Ibragimbegovich J. Thick shell and solid elements with independent rotation fields // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1991. Vol. 31. Pp. 1393–1414.

27. Биргер И.А., Пановко Я.Г. Прочность. Устойчивость. Колебания. М.: Машиностроение, 1968. Т. 3. 567 с.

28. Евзеров И.Д., Гераймович Ю.Д., Лазнюк М.В., Марченко Д.В. Численное решение задач устойчивости и сильного изгиба // Труды четвертой международной научно-технической конференции «Теория и практика расчета зданий и элементов конструкций. Аналитические и численные методы». М.: МГСУ, 2011. С. 155–166.

Исаак Данилович Евзеров, Киев, Украина
Тел. моб.: +38(050)3302498; эл. почта: ide@lira.com.ua

doi: 10.5862/MCE.45.2

The Stability Problems for Bars and Plates

I.D. Ievzerov
LLC PRAYM KAD, Kiev, Ukraine
+38(050)3302498; e-mail: ide@lira.com.ua

Key words

stability problems; bars and plates; variation formulations

Abstract

The stability problems for bars and plates are considered. Variation formulations are used for the stability problems. The positive definiteness of the potential energy functional is studied. The transition from the three-dimensional stability problem to the corresponding problems for bars and plates is executed.

Concepts of displacements through the section of bar and plate thickness are used for geometrically nonlinear problems. These concepts are derived from the assumptions of the vanishing of the strain through the cross-section plane of the bar or the thickness of the plate. The second variations of non-linear deformations are calculated. The integration through the cross-section of the bar and plate thickness was made, using known formulas for the efforts and the equilibrium equation. The stability functionals for bars and plates are obtained.

Comparing to the results known before is conducted. A solution to the test problem for the centrally compressed cantilever beam with a cross section of Pi, which was modeled by plates, is given.

References

1. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity].Moscow: Nauka, 1987. 246 p. (rus)
2. Slivker V.I. *Stroitelnaya mekhanika. Variatsionnyye osnovy* [Structural mechanics. Variational foundation]. Moscow: ASV, 2005. 708 p. (rus)
3. Dyuvo G., Lions Zh.-L. *Neravenstva v mekhanike i fizike* [Inequalities in mechanics and physics]. Moscow: Nauka, 1980. 383 p. (rus)
4. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. Moscow: Sudpromgiz, 1962. 344 p. (rus)
5. Goldenveyzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Moscow: Nauka, 1976. 475 p. (rus)
6. Goldenveizer A.L. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*. 1994. Vol. 58. No. 5. Pp. 96-108. (rus)
7. Syarle F., Rabye P. *Uravneniya Karmana* [Karman equations]. Moscow: Mir, 1983. 172 p. (rus)
8. Ciarlet P.G. *Mathematical elasticity. Theory of plates*. Amsterdam: Elsevier, 1997. 497p.
9. Nazarov S.A. *Asimptoticheskiy analiz tonkikh plastin i sterzhney* [Asymptotic analysis of thin plates and rods]. Novosibirsk: Nauchnaya kniga, 2002. 406 p. (rus)
10. Bauer S.M., Filippov S.V., Smirnov A.L., Tovstich P.E. Asymptotic methods in mechanics with application to thin plates and shells. *Asymptotic Methods in Mechanics & Lecture Notes*. 1993. Vol. 3. Pp. 3–141.
11. Miara B. Justification of the asymptotic analysis of elastic plates. Applicable Analysis. 1989. Vol. 31. Pp. 291–307.
12. Cywiński Z. Formänderungsgrössenverfahren mittig gedrückter dünnwandiger Stäbe mit einfach- und doppeltsymmetrischen offen Querschnitten. *Stahlbau*. 2005. No. 12. Pp. 916–924.
13. Coşkun S.B. Analysis of tilt-buckling of Euler columns with varying flexural stiffness using homotopy perturbation method. *Mathematical Modeling and Analysis*. 2010. Vol. 15. No. 3. Pp. 275–286.
14. He J.-H. Recent development of the homotopy perturbation method. *Topological Methods in Nonlinear Analysis*. 2008. Vol. 31. No. 2. Pp. 205–209.
15. Atey M.T. Determination of critical buckling loads for variable stiffness Euler columns using homotopy perturbation method. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2009. Vol. 10. No. 2. Pp. 199–206.

16. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Trudy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Vychislitelnaya mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela»* [Proceedings of international scientific and technical conference "Computational mechanics of deformable rigid body]. Vol. 2. Moscow: 2006. Pp. 316–323. (rus)

17. Perelmuter A.V., Slivker V.I. On an error of mysterious nature that happens in software when analyzing mechanikal systems for buckling. *Proceedings of the 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics. Aalborg, Denmark, 18–19 October.* Denmark: Aalborg University, 2002. Pp. 229–232.

18. Bolotin V.V. *Problemy mekhaniki tverdogo deformiruemogo tela* [Problems of mechanics of deformable rigid body]. Leningrad: Sudostroeniye, 1973. Pp. 83–88. (rus)

19. Bolotin V.V. *Problemy ustoychivosti v stroitelnoy mekhanike* [Problems of stability in structural mechanics]. Moscow: Stroyizdat, 1965. Pp. 6–27. (rus)

20. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Ustoychivost ravnovesiya konstruktsii i rodstvennyye problemy* [Stability of structure balance and related problems]. Moscow: SKAD SOFT, 2009. 704 p. (rus)

21. Vasidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti* [Variational methods in theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Mir, 1987. 542 p. (rus)

22. Vlasov V.Z. *Tonkostennyye uprugiye sterzhni (prochnost, ustoychivost, kolebaniya)* [Thin-walled elastic rods (strength, stability, vibrations)]. Moscow: Gosstroiyzdat, 1940. 276 p. (rus)

23. Lalin V.V., Rybakov V.A., Morozov S.A. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No. 1(27). Pp. 53–73. (rus)

24. Bryan Anwer Ali, Sariffuddin Saad, Mohd Osman, Yusof Ahmad. Finite Element Analysis of Cold-formed Steel Connections. *International Journal of Engineering (IJE).* 2011. Vol. 5. No. 2. Pp. 55–61.

25. Gorodetskii A.S., Evzerov I.D. *Kompyuternyye modeli konstruktsii* [Computer models of the structure]. Kiev: Fakt, 2007. 393 p. (rus)

26. Wilson E.L., Ibragimbegovich J. Thick shell and solid elements with independent rotation fields. *International Journal for Numerical Methods in Engineering.* 1991. Vol. 31. Pp.1393–1414.

27. Birger I.A., Panovko Ya.G. *Prochnost. Ustoychivost. Kolebaniya* [Strength, stability, vibrations]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1968. Vol. 3. 567 p. (rus)

28. Evzerov I.D., Geraimovich Yu.D., Laznyuk M.V., Marchenko D.V. *Trudy chetvertoy mezhdunarodnoy nauchno-tekhnicheskoy konferentsii «Teoriya i praktika rascheta zdaniy i elementov konstruktsiy. Analiticheskiye i chislennyye metody»* [Proceedings of the fourth international scientific and technical conference "Theory and practice of analysis of buildings and structural elements. Analytic and numerical methods]. Moscow: MGSU, 2011. Pp. 155–166. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 6–11