Математическая модель деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения

Д.т.н., профессор В.В. Карпов;
аспирант А.А. Семенов*,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»

Ключевые слова: оболочка; математическая модель; функционал полной энергии деформации; ортотропия; подкрепленные оболочки; оболочки вращения

В различных областях техники в последнее время все чаще применяются конструкции из композитных материалов [1, 2], особенно в виде тонкостенных оболочек [3, 4]. Исследования в данной области проводятся не только в России, но и за рубежом [5–9]. Возобновление интереса к исследованию оболочечных конструкций в последние годы вызвано, прежде всего, развитием вычислительной техники, которая позволила теперь по-новому взглянуть на нелинейные проблемы оболочек. Также немалую роль здесь играет появление новых материалов, позволяющих существенно улучшить прочностные характеристики конструкций. Активно изучается поведение цилиндрических оболочек [10–12], которые применяются в самых разнообразных областях техники.

При использовании таких композитных материалов, как, например, железобетон [13] или стеклопластик, армирующие элементы часто располагают вдоль осей криволинейной системы координат оболочки, и в таком случае конструкцию можно считать ортотропной [14].

Для повышения жесткости тонкостенные конструкции часто подкрепляются ребрами [15–18], что играет особо важную роль при строительстве большепролетных покрытий и перекрытий.

Обзор литературы

Основы теории анизотропных пластин и оболочек, в частности, ортотропных, можно найти в работах [19–21]. Одни из первых наиболее полных исследований по устойчивости ортотропных оболочек касаются кратковременной устойчивости стеклопластиковых цилиндрических конструкций при различных внешних нагрузках [22]. Проблемы длительной устойчивости были рассмотрены в работе [23]. Обширное исследование проблем устойчивости ортотропных оболочек приводится в работе Р.Б. Рикардса и Г.А. Тетерса [14]. Модель, описанная в указанных работах, строится на основе простейших уравнений теории оболочек, не учитывающих поперечные сдвиги, а алгоритм исследования устойчивости основан на методе Эйлера решения задач на собственные значения, т.е. линеаризованных уравнениях. В геометрически нелинейной постановке устойчивость ортотропных оболочек рассмотрена в работе В.А. Крысько [24], где исследуются пологие гладкие оболочки.

Известно достаточно много работ, посвященных расчету ортотропных оболочек, но в них недостаточно полно исследуется ряд важных факторов, влияющих на напряженно-деформированное состояние оболочки и ее устойчивость. В частности, при расчете подкрепленных оболочек не учитываются такие факторы, как поперечные сдвиги, сдвиговая и крутильная жесткость ребер и др.

Чаще всего математическая модель в теории оболочек строится на основе уравнений равновесия. Использование вместо этих уравнений функционала полной энергии деформации оболочки позволяет применять более эффективные алгоритмы исследования. Варианты таких алгоритмов для изотропных подкрепленных оболочек можно найти в работах [25–27].

Постановка задачи

Целью данной работы является построение математической модели деформирования подкрепленных ортотропных оболочек вращения, учитывающей ряд дополнительных факторов. Модель является геометрически нелинейной, учитывает поперечные сдвиги, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также сложную форму контура конструкции.

Описание исследования

Математическая модель деформирования тонкой подкрепленной оболочки строится на основе функционала полной энергии деформации (или уравнений равновесия), а также включает в себя геометрические соотношения, физические соотношения и граничные условия.

Модель Кирхгофа – Лява, когда неизвестными являются только три функции перемещений $U = U(x, y), V = V(x, y), W = W(x, y)$ и в уравнениях равновесия функции U и V имеют вторые производные, а функция W – четвертые, дает существенную погрешность. Необходимо учитывать еще и поперечные сдвиги, т. е. рассматривать модель Тимошенко – Рейснера. Тогда неизвестными будут пять функций – три функции перемещений точек координатной поверхности U, V, W и две функции, характеризующие углы поворота нормали в плоскостях XOZ, YOZ: $\Psi_x = \Psi_x(x, y), \Psi_y = \Psi_y(x, y)$. При этом получаемая модель будет геометрически нелинейной, т. е. зависимость деформаций от перемещений – нелинейная, что позволяет исследовать не только напряженно-деформированное состояние оболочки, но и ее устойчивость. В дальнейшем будем рассматривать только модель Тимошенко – Рейснера, учитывающую наличие ребер жесткости и сложную форму контура конструкции.

В рассматриваемой модели геометрические соотношения для срединной поверхности оболочки принимают вид [28]:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} V \frac{\partial A}{\partial y} - k_x W + \frac{1}{2}\theta_1^2,$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} U \frac{\partial B}{\partial x} - k_y W + \frac{1}{2}\theta_2^2,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} U \frac{\partial A}{\partial y} - \frac{1}{AB} V \frac{\partial B}{\partial x} + \theta_1\theta_2,$$

$$\theta_1 = -\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} + k_x U\right), \quad \theta_2 = -\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} + k_y V\right),$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ – деформации удлинения вдоль координат x, y срединной поверхности; γ_{xy} – деформации сдвига в плоскости XOY; k_x, k_y – главные кривизны оболочки вдоль осей x и y; A, B – параметры Ламе, характеризующие геометрию оболочки.

Функции изменения кривизн χ_1, χ_2 и кручения χ_{12} принимают вид:

$$\chi_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\Psi_x,$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A}\frac{\partial \Psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B}\frac{\partial \Psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\Psi_x + \frac{\partial B}{\partial x}\Psi_y\right).$$

Используя геометрические соотношения, можно сформировать выражения для усилий и моментов. В случае дискретного подкрепления конструкции ребрами жесткости для ортотропных оболочек они будут иметь вид [29]:

$$
\begin{gathered}
N_x = G_1\left[\left(h+\overline{F}\right)\left(\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y\right)+\overline{S}\left(\chi_1+\mu_2\chi_2\right)\right],\\
N_y = G_2\left[\left(h+\overline{F}\right)\left(\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x\right)+\overline{S}\left(\chi_2+\mu_1\chi_1\right)\right],\\
N_{xy} = N_{yx} = G_{12}\left[\left(h+\overline{F}\right)\gamma_{xy}+2\overline{S}\chi_{12}\right],\\
M_x = G_1\left[\overline{S}\left(\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y\right)+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\left(\chi_1+\mu_2\chi_2\right)\right],\\
M_y = G_2\left[\overline{S}\left(\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x\right)+\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\left(\chi_2+\mu_1\chi_1\right)\right],\\
M_{xy} = M_{yx} = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy}+2\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right)\chi_{12}\right],\\
Q_x = G_{13}k\left(h+\overline{F}\right)\left(\psi_x-\theta_1\right),\\
Q_y = G_{23}k\left(h+\overline{F}\right)\left(\psi_y-\theta_2\right),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $G_1 = \dfrac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}$, $G_2 = \dfrac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}$. Здесь N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx} – нормальные усилия вдоль осей x, y и сдвиговые усилия в плоскости XOY соответственно; M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx} – изгибающие моменты в направлении осей x, y и крутящие моменты; Q_x, Q_y – поперечные силы в плоскостях XOZ и YOZ; $\overline{F}$, $\overline{S}$, $\overline{J}$ – функции, выражающие площадь поперечного или продольного сечения ребер, приходящуюся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции этого сечения.

В приведенных соотношениях E_1, E_2 – модули упругости в направлениях x и y; μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига в плоскостях XOY, XOZ, YOZ соответственно. В силу условия симметрии упругих постоянных верно равенство $E_1\mu_2 = E_2\mu_1$.

Из показанных выше соотношений можно сформировать функционал полной энергии деформирования подкрепленной оболочки [30]:

$$
\begin{gathered}
Э = \frac{1}{2}\int_0^a\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\Big\{N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + \frac{1}{2}\left(N_{xy}+N_{yx}\right)\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 +\\
+\left(M_{xy}+M_{yx}\right)\chi_{12} + Q_x\left(\psi_x-\theta_1\right) + Q_y\left(\psi_y-\theta_2\right) - 2qW\Big\}ABdxdy.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Способ закрепления контура конструкции учитывается через граничные условия, которые влияют на выбор аппроксимирующих функций [30, 31], а область, занимаемая оболочкой, задается в пределах интегрирования [32]: $0 \le x \le a, y_1(x) \le y \le y_2(x)$. Использование функций $y_1(x), y_2(x)$ позволяет учитывать нестандартную форму контура оболочки.

Подставив (1) в (2) и выполнив алгебраические преобразования, получим [30]:

$$
\begin{gathered}
Э = \frac{G_1}{2}\int_0^a\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\Big\{a_1\varepsilon_x^2 + a_2\varepsilon_y^2 + a_3\varepsilon_x\varepsilon_y + a_4\gamma_{xy}^2 + a_5\left(\psi_x-\theta_1\right)^2 +\\
+a_6\left(\psi_y-\theta_2\right)^2 + a_7\varepsilon_x\chi_1 + a_8\varepsilon_x\chi_2 + a_8\varepsilon_y\chi_1 + a_9\varepsilon_y\chi_2 + a_{10}\gamma_{xy}\chi_{12} + .\\
+a_{11}\chi_1^2 + a_{12}\chi_2^2 + a_{13}\chi_1\chi_2 + a_{14}\chi_{12}^2 - a_{15}qW\Big\}ABdxdy
\end{gathered}
\tag{3}
$$

С учетом того, что $G_1\mu_2 + G_2\mu_1 = \dfrac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2} + \dfrac{E_2\mu_1}{1-\mu_1\mu_2} = 2\dfrac{E_1\mu_2}{1-\mu_1\mu_2} = 2G_1\mu_2$, и с дополнительными обозначениями $\overline{G}_2 = \dfrac{G_2}{G_1}$, $\overline{G}_{12} = \dfrac{G_{12}}{G_1}$, $\overline{G}_{13} = \dfrac{G_{13}}{G_1}$, $\overline{G}_{23} = \dfrac{G_{23}}{G_1}$, коэффициенты $a_1 - a_{15}$ будут иметь вид:

$$a_1 = h + \overline{F},\ a_2 = \overline{G}_2\left(h+\overline{F}\right),\ a_3 = 2\mu_2\left(h+\overline{F}\right),\ a_4 = \overline{G}_{12}\left(h+\overline{F}\right),$$
$$a_5 = \overline{G}_{13}k\left(h+\overline{F}\right),\ a_6 = \overline{G}_{23}k\left(h+\overline{F}\right),\ a_7 = 2\overline{S},\ a_8 = 2\mu_2\overline{S},$$
$$a_9 = 2\overline{G}_2\overline{S}, a_{10} = 4\overline{G}_{12}\overline{S},\ a_{11} = \frac{h^3}{12} + \overline{J},\ a_{12} = \overline{G}_2\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right),$$
$$a_{13} = 2\mu_2\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right), a_{14} = 4\overline{G}_{12}\left(\frac{h^3}{12}+\overline{J}\right),\ a_{15} = \frac{2}{G_1}.$$

При введении ребер жесткости постоянной высоты по методу конструктивной анизотропии функционал полной энергии деформации оболочки будет иметь вид (2), а усилия и моменты примут вид [29, 30]:

$$N_x = G_1\left[\left(h+F_x\right)\left(\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y\right) + S_x\left(\chi_1 + \mu_2\chi_2\right)\right],$$
$$N_y = G_2\left[\left(h+F_y\right)\left(\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x\right) + S_y\left(\chi_2 + \mu_1\chi_1\right)\right],$$
$$N_{xy} = G_{12}\left[\left(h+F_y\right)\gamma_{xy} + 2S_y\chi_{12}\right],$$
$$N_{yx} = G_{12}\left[\left(h+F_x\right)\gamma_{xy} + 2S_x\chi_{12}\right],$$

$$M_x = G_1\left[S_x\left(\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y\right) + \left(\frac{h^3}{12} + J_x\right)\left(\chi_1 + \mu_2\chi_2\right)\right],$$
$$M_y = G_2\left[S_y\left(\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x\right) + \left(\frac{h^3}{12} + J_y\right)\left(\chi_2 + \mu_1\chi_1\right)\right], \tag{4}$$
$$M_{xy} = G_{12}\left[S_y\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + J_y\right)\chi_{12}\right],$$
$$M_{yx} = G_{12}\left[S_x\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + J_x\right)\chi_{12}\right],$$
$$Q_x = G_{13}k\left(h+F_x\right)\left(\psi_x - \theta_1\right),$$
$$Q_y = G_{23}k\left(h+F_y\right)\left(\psi_y - \theta_2\right),$$

где $F_x = F_x(x,y)$, $F_y = F_y(x,y)$, $S_x = S_x(x,y)$, $S_y = S_y(x,y)$, $J_x = J_x(x,y)$, $J_y = J_y(x,y)$ – площадь поперечного или продольного сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения; статический момент и момент инерции этого сечения, являющиеся функциями координат x, y. Для произвольного вида оболочек приведенные жесткостные характеристики ребер представимы в виде:

$$F_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{h^i r_i}{\overline{b}}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{h^j r_j}{\overline{a}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{h^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_j}{\overline{a}}\ ;$$

$$F_y=\sum_{j=1}^{m}\frac{h^j r_j}{\overline{a}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{h^i r_i}{\overline{b}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{h^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_i}{\overline{b}}\ ;$$

$$S_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{S^i r_i}{\overline{b}}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{S^j r_j}{\overline{a}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{S^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_j}{\overline{a}}\ ;$$

$$S_y=\sum_{j=1}^{m}\frac{S^j r_j}{\overline{a}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{S^i r_i}{\overline{b}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{S^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_i}{\overline{b}}\ ;$$

$$J_x=\sum_{i=1}^{n}\frac{J^i r_i}{\overline{b}}+\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{J^j r_j}{\overline{a}}-\sum_{i=1}^{n}\frac{J^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_j}{\overline{a}};$$

$$J_y=\sum_{j=1}^{m}\frac{J^j r_j}{\overline{a}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{J^i r_i}{\overline{b}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{J^{ij} r_i r_j}{\overline{a}\overline{b}}\right)\frac{r_i}{\overline{b}}.$$

Здесь r – ширина ребра; h – высота; индексы i и j указывают номер ребра, расположенного параллельно осям x и y соответственно; n,m – количество ребер; переменные $\overline{a},\overline{b}$ позволяют ребрам жесткости повторять геометрию оболочки и определяются как $\overline{a}=aA$, $\overline{b}=(y_2(x)-y_1(x))B\left(\frac{a}{2}\right)$. В работе [17] подробно рассматривается подкрепление конструкции ребрами переменной высоты, что в ряде случаев является наиболее эффективным.

Подставив (4) в (2), после соответствующих преобразований получим функционал в виде (3), где

$$a_1=h+F_x,\ a_2=\overline{G}_2\left(h+F_y\right),\ a_3=\mu_2\left(2h+F_x+F_y\right),$$

$$a_4=\frac{1}{2}\overline{G}_{12}\left(2h+F_x+F_y\right), a_5=\overline{G}_{13}k\left(h+F_x\right),$$

$$a_6=\overline{G}_{23}k\left(h+F_y\right),\ a_7=2S_x,\ a_8=\mu_2\left(S_x+S_y\right),$$

$$a_9=2\overline{G}_2 S_y,\ a_{10}=2\overline{G}_{12}\left(S_x+S_y\right),\ a_{11}=\frac{h^3}{12}+J_x,$$

$$a_{12}=\overline{G}_2\left(\frac{h^3}{12}+J_y\right),\ a_{13}=\mu_2\left(\frac{h^3}{6}+J_x+J_y\right),$$

$$a_{14}=2\overline{G}_{12}\left(\frac{h^3}{6}+J_x+J_y\right),\ a_{15}=\frac{2}{G_1}.$$

Заключение

Таким образом, функционал полной энергии деформации (3), являющийся основой для математической модели деформирования ортотропных подкрепленных оболочек вращения принимает такой же вид, что и для изотропных оболочек [30]. Отличие состоит лишь в числовых коэффициентах. Следовательно, для его минимизации можно использовать методики расчета и алгоритмы, описанные в работах [25–27]. Например, алгоритмы, основанные на градиентном методе и методе продолжения решения по параметру.

Представленная математическая модель деформирования тонкой подкрепленной ортотропной оболочки учитывает ряд важнейших факторов, что позволяет более точно и полно проводить исследование напряженно-деформированного состояния и устойчивости конструкции.

Литература

1. Зеленский Э.С., Куперман А.М., Горбаткина Ю.А., Иванова-Мумжиева В.Г., Берлин А.А. Армированные пластики – современные конструкционные материалы // Российский химический журнал. 2001. Т. XLV. №2. С. 56–74.

2. Смердов А.А., Буянов И.А., Чуднов И.В. Анализ оптимальных сочетаний требований к разрабатываемым углепластикам для крупногабаритных ракетно-космических конструкций // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2012. №8. С. 70–77.

3. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. 248 с.

4. Пикуль В.В. К расчету устойчивости анизотропной цилиндрической оболочки прочного корпуса подводного аппарата // Вестник Дальневосточного государственного технического университета. 2009. №2(2). С. 98–105.

5. Carrera E., Brischetto S., Nali P. Plates and shells for smart structures: classical and advanced theories for modeling and analysis. First edition. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011. 322 p.

6. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009 // Composite Structures. 2010. No.93. Pp. 14–31.

7. Pimenta P.M., Wriggers P. New trends in thin structures: formulation, optimization and coupled problems // CISM International Centre for Mechanical Sciences. 2010. Vol. 519. 228 p.

8. Libai A., Simmonds J.G. The nonlinear theory of elastic shells. Cambridge, UK: CUP, 1998. 553 p.

9. Ventsel E., Krauthammer T. Thin plates and shells: theory, analysis and applications. New York: Marcel Dekker, 2001. 684 p.

10. Ahmed M.K. Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads [Электронный документ] // Mathematical Problems in Engineering. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2009. URL: http://eudml.org/doc/232201 (дата обращения: 06.03.2013).

11. Dau F., Pablo F., Polit O. New reference solutions and parametric study for multilayered cylindrical shell // International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences. 2010. Vol. 4. No.2. Pp. 133–161.

12. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia // Composite Structures. 2013. No.98. Pp. 169–191.

13. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells // Engineering Structures. 2010. No.32. Pp. 1650–1658.

14. Рикардс Р.Б., Тетерс Г.А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. Рига: Зинатне, 1974. 310 с.

15. Валеев Р.М., Куваев А.С., Курлапов Д.В., Родионов А.В. Усиление железобетонных конструкций с применением полимерных композитов // Инженерно-строительный журнал. 2009. №3. С. 22–24.

16. Дьячкова А.А., Кузнецов В.Д. Расчет усиления железобетонных плит углеродными композиционными материалами // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 3. С. 25–28.

17. Москаленко Л.П. Эффективность подкрепления пологих оболочек ребрами переменной высоты // Вестник гражданских инженеров. 2011. №3(28). С. 46–50.

18. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners // Journal of Sound and Vibration. 2009. No.327. Pp. 41–54.

19. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматлит, 1957. 463 с.

20. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360 с.

21. Амбарцумян С.А. Некоторые вопросы теории оболочек из композиционных материалов // Успехи механики. 1983. Т. 6. Вып. 3–4. С. 69–77.

22. Буштырков А.А. Нелинейная задача устойчивости цилиндрической ортотропной оболочки при осевом сжатии и поперечном давлении // В кн.: Проблемы устойчивости в строительной механике. М.: Госстройиздат, 1965. С. 193–202.

23. Работнов Ю.Н. Длительная устойчивость пластин и оболочек // Механика полимеров. 1966. №2. С. 314–318.

24. Крысько В.А. Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек. Саратов: Изд-во Сарат. Ун-та, 1976. 216 с.

25. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 2. Вычислительный эксперимент при статическом механическом воздействии. М.: Физматлит, 2011. 248 с.

26. Баранова Д.А. Алгоритм исследования устойчивости подкрепленных оболочек вращения на основе метода L-BFGS // Промышленное и гражданское строительство. 2012. №3. С. 58–59.

27. Москаленко Л.П. Методика исследования устойчивости пологих ребристых оболочек на основе метода продолжения решения по наилучшему параметру // Вестник гражданских инженеров. 2011. №4(29). С. 161–164.

28. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромиздат, 1962. 431 с.

29. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 330 с.

30. Карпов В. В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.

31. Семенов А. А. Компьютерное моделирование докритического и закритического поведения тонкостенных оболочек при разных способах закрепления контура // Вестник гражданских инженеров. 2012. №4(33). С. 247–251.

32. Семенов А. А. Методика учета формы контура тонкостенной оболочки, заданного функционально // Актуальные проблемы современного строительства и пути их эффективного решения: Материалы международной научно-практической конференции. 10–12 октября 2012. СПб, 2012. С. 43–48.

Алексей Александрович Семенов, Санкт-Петербург, Россия

Тел. раб.: +7(812)575-05-49; эл. почта: sw.semenov@gmail.com

doi: 10.5862/MCE.40.11

Mathematical model of deformation of orthotropic reinforced shells of revolution

V.V. Karpov;
A.A. Semenov
Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia
+7(812)575-05-49; e-mail: sw.semenov@gmail.com

Key words

shell; the mathematical model; the total strain energy functional; orthotropy; reinforced shells; shells of revolution

Abstract

In recent years there are more and more structures made of composite materials, especially in the form of thin-walled shells, being applied in various fields of technology. When using composite materials such as concrete or fiberglass, reinforcing elements are often placed along the axes of the curvilinear coordinate system of the shell, and in this case, the structure can be considered as orthotropic.

There are a lot of papers on the calculation of orthotropic shells, but they do not adequately investigate a number of important factors that influence the stress-strain state of the shell and its stability. In particular, the calculation of reinforced shells does not take into account such factors as in-plane shear, shear and torsional stiffness of ribs, etc.

The paper presents the mathematical model of deformation of thin orthotropic shells of revolution, based on the model of Timoshenko – Reissner. The model takes into account the design of reinforcement with the shear and torsional stiffness of the ribs, geometric nonlinearity and also the irregular shape of the shell. Possibility of application of methods and algorithms which are used in the study of isotropic shells is shown. The presented model investigates the stress-strain state and stability of thin orthotropic reinforced shells of revolution more adequate.

References

1. Zelenskiy E.S., Kuperman A.M., Gorbatkina Yu.A., Ivanova-Mumzhieva V.G., Berlin A.A. . *Russian Journal of General Chemistry.* 2001. Vol. XLV, No.2. Pp. 56–74. (rus)
2. Smerdov A.A., Buyanov I.A., Chudnov I.V. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Mashinostroeniye*. 2012. No.8. Pp. 70–77. (rus)
3. Sukhinin S.N. *Prikladnye zadachi ustoychivosti mnogosloinykh kompozitnykh obolochek* [Applied problems of multilayer composite shell stability]. Moscow: FIZMATLIT, 2010. 248 p. (rus)
4. Pikul V.V. *Vestnik Dalnevostochnogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2009. №2(2). Pp. 98–105. (rus)
5. Carrera E., Brischetto S., Nali P. *Plates and Shells for Smart Structures: Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis*. First Edition. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 2011. 322 p.
6. Qatu M.S., Sullivan R.W., Wang W. Recent research advances on the dynamic analysis of composite shells: 2000–2009. *Composite Structures*. 2010. No.93. Pp. 14–31.
7. Pimenta P.M., Wriggers P. New Trends in Thin Structures: Formulation, Optimization and Coupled Problems. *CISM International Centre for Mechanical Sciences*. 2010. Vol. 519. 228 p.
8. Libai A., Simmonds J.G. *The Nonlinear Theory of Elastic Shells*. Cambridge, UK: CUP, 1998. 553 p.
9. Ventsel E., Krauthammer T. *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis and Applications*. New York: Marcel Dekker, 2001. 684 p.
10. Ahmed M.K. *Elastic buckling behavior of a four-lobed cross section cylindrical shell with variable thickness under non-uniform axial loads* [Online source]. Mathematical Problems in Engineering. Hindawi Publishing Corporation. Vol. 2009. URL: http://eudml.org/doc/232201 (accessed: March 6, 2013).
11. Dau F., Pablo F., Polit O. New reference solutions and parametric study for multilayered cylindrical shell. *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*. 2010. Vol. 4. No.2. Pp. 133–161.

12. Qu Y., Long X., Wu S., Meng G. A unified formulation for vibration analysis of composite laminated shells of revolution including shear deformation and rotary inertia. *Composite Structures*. 2013. No.98. Pp. 169–191.

13. Tomás A., Martí P. Shape and size optimisation of concrete shells. *Engineering Structures*. 2010. No.32. Pp. 1650–1658.

14. Rikards R.B., Teters G.A. *Ustoychivost obolochek iz kompozitnykh materialov* [Composite shell stability]. Riga: Zinatne, 1974. 310 p.

15. Valeev R.M., Kuvaev A.S., Kurlapov D.V., Rodionov A.V. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.3. Pp. 22–24. (rus)

16. Dyachkova A.A., Kuznetsov V.D. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.3. Pp. 25–28.

17. Moskalenko L.P. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2011. No.3(28). Pp. 46–50. (rus)

18. Efimtsov B.M., Lazarev L.A. Forced vibrations of plates and cylindrical shells with regular orthogonal system of stiffeners. *Journal of Sound and Vibration*. 2009. No.327. Pp. 41–54. (rus)

19. Lekhnitskiy S.G. *Anizotropnye plastinki* [Anisotropic plates]. Moscow: Fizmatlit, 1957. 463 p. (rus)

20. Ambartsumyan S.A. *Teoriya anizotropnykh plastin* [Theory of anisotropic plates]. Moscow: Nauka, 1987. 360 p. (rus)

21. Ambartsumyan S.A. *Uspekhi mekhaniki*. 1983. Vol. 6. No.3–4. Pp. 69–77. (rus)

22. Bushtyrkov A.A. Nelineinaya zadacha ustoychivosti tsilindricheskoy ortotropnoy obolochki pri osevom szhatii i poperechnom davlenii. *Problemy ustoychivosti v stroitelnoy mekhanike*. Moscow: Gosstroyizdat, 1965. Pp. 193–202.

23. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika polimerov*. 1966. No.2. Pp. 314–318. (rus)

24. Krysko V.A. *Nelineinaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek* [Non-linear statics and dynamics of the heterogeneous shells]. Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 1976. 216 p. (rus)

25. Karpov V. V. *Prochnost i ustoichivost podkreplennykh obolochek vrashcheniya. V 2 ch. Ch.2: Vychislitelnyy eksperiment pri staticheskom mekhanicheskom vozdeistvii* [Strength and stability of the reinforced shells of revolution. In 2 parts. Part 2. Computing experiment under statical and mechanical effect]. Moscow: Fizmatlit, 2011. 248 p. (rus)

26. Baranova D.A. *Industrial and Civil Engineering*. 2012. No.3. Pp. 58–59. (rus)

27. Moskalenko L.P. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2011. No.4(29). Pp. 161–164. (rus)

28. Novozhilov V.V. *Teoriya tonkikh obolochek* [Theory of thin shells]. Leningrad: Sudpromizdat, 1962. 431 p. (rus)

29. Karpov V.V. *Matematicheskoye modelirovaniye, algoritmy issledovaniya modeli, vychislitelnyy eksperiment v teorii obolochek* [Mathematical simulation, model analysis algorithms, computing experiment in theory of shells]. Saint-Petersburg: SPbGASU, 2006. 330 p. (rus)

30. Karpov V.V. *Prochnost i ustoychivost podkreplennykh obolochek vrashcheniya. V 2 ch. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya* [Strength and stability reinforced shells of revolution. In 2 parts. Part 1. Models and algorithms of strength and stability of the reinforced shells of revolution]. Moscow: Fizmatlit, 2010. 288 p. (rus)

31. Semenov A.A. *Vestnik grazhdanskikh inzhenerov*. 2012. No.4(33). Pp. 247–251. (rus)

32. Semenov A.A. *Aktualnye problemy sovremennogo stroitelstva i puti ikh effektivnogo resheniya: materialy mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. 10–12 oktyabrya 2012* [Urgent problem of the modern building and ways of its efficient solution: materials of an international theoretical and practical conference 10–12 October 2012]. Saint-Petersburg, 2012. Pp. 43–48. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 100–106