

Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

*Старший преподаватель Н.В. Ковалева**,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»;
д.т.н., профессор Ю.Л. Рутман,
ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет»;
к.т.н., научный сотрудник Г.В. Давыдова,
ООО «Геоинжпроект»

Ключевые слова: сейсмоизоляция; оптимальные параметры демпфирования; сейсмические воздействия; синтезированные акселерограммы; спектральная плотность; дисперсия

Если система сейсмоизоляции (ССИ) состоит из упруго-демпферных опор, то она превращает защищаемый объект (ЗО) в низкочастотную систему, фильтрующую энергосодержащие высокочастотные составляющие сейсмического воздействия.

При этом демпфирование в ССИ должно быть достаточно высоким, чтобы исключить резонансные явления (то есть исключить значительное увеличение амплитуды колебаний, если частоты некоторых составляющих широкополосного сейсмического воздействия и системы «ЗО – ССИ» окажутся близки). Применение демпферов порождает задачу оптимизации их параметров.

Ранее влияние демпфирования на сейсмоизоляционный эффект рассматривалось как в отечественных, так и в зарубежных исследованиях [1–6]. В этих работах исследовались лишь некоторые частные стороны проблемы. Математических формулировок цели и алгоритма решения задачи оптимизации демпфирования предложено не было. Целью представленной работы является формулировка критериев и алгоритма определения оптимальных параметров демпфирования в ССИ.

Действительно, сильное демпфирование ослабляет эффект фильтрации высоких частот. Слабое демпфирование способствует появлению резонансных явлений на низких частотах. Следовательно, существует оптимальное демпфирование, зависящее от спектрального состава воздействия. Так как сейсмические воздействия являются случайными функциями, решение задачи оптимизации возможно лишь в статистической постановке. Ниже дана методика поиска оптимальных параметров демпфирования для случая, когда моделью ЗО является система с одной степенью свободы. Такая модель хорошо описывает динамику невысоких ЗО (не выше 15–20 этажей).

1. Качественная иллюстрация оптимального демпфирования

Рассмотрим принципиальную сторону задачи оптимизации на примере линейной системы с одной степенью свободы. Уравнение колебаний такой системы имеет вид:

$$\ddot{x} + \alpha \cdot \dot{x} + p^2 \cdot x = -\ddot{y}(t), \quad (1)$$

где $p = \sqrt{\frac{c}{m}}$ – собственная частота системы; $\alpha = 2 \cdot \gamma \cdot p$ – коэффициент затухания;

c – жесткость системы; m – масса системы.

В случае системы маятникового типа [7] собственная частота определяется как $p = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

где g – ускорение свободного падения; l – длина маятника; γ – безразмерный коэффициент линейного демпфирования; x – горизонтальное смещение ЗО относительно движущего фундамента; $\ddot{y}(t)$ – горизонтальное ускорение фундамента ЗО при землетрясении.

При поличастотном воздействии на эту систему возможны следующие ситуации.

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

1. Если в воздействии преобладают высокочастотные (по сравнению с частотой системы) составляющие, то при отсутствии демпфирования сейсмоизоляционный эффект максимален. При увеличении демпфирования этот эффект уменьшается. При очень большом демпфировании система приобретает признаки жесткой связи защищаемого объекта и основания.

2. Если в воздействии преобладает частота, близкая к собственной частоте системы, то увеличение демпфирования уменьшает коэффициент динамичности воздействия до 1 [8]. Малое демпфирование приводит к резонансным эффектам.

3. Если во внешнем воздействии имеются и низкочастотные, и высокочастотные составляющие, то существует оптимальное демпфирование, обеспечивающее минимальное значение абсолютных ускорений ЗО, то есть минимальные инерционные нагрузки. Значение оптимального коэффициента демпфирования $\gamma = \frac{\alpha}{2 \cdot p}$ лежит внутри интервала (0;1).

Чтобы качественно прояснить ситуацию, рассмотрим одночастотную и двухчастотную модели внешнего воздействия, при этом собственная частота исследуемой системы – 0.4 Гц. В первой модели на систему действовала либо низкочастотная нагрузка с частотой, близкой к частоте защищаемого объекта, либо высокочастотная с частотой, в несколько раз превышающей частоту защищаемого объекта. Полученные при таком нагружении результаты показаны на рисунках 1а, 1б и наглядно подтверждают сказанное выше. Во второй модели на систему действовала нагрузка, имеющая две составляющие – низкочастотную и высокочастотную с различным соотношением их амплитуд:

$$\ddot{y}(t) = A_H \sin(2\pi \cdot f_H \cdot t) + A_B \sin(2\pi \cdot f_B \cdot t),$$

где f_H, f_B – значения частот низкочастотной и высокочастотной составляющих нагрузки соответственно; A_H, A_B – значения амплитуд.

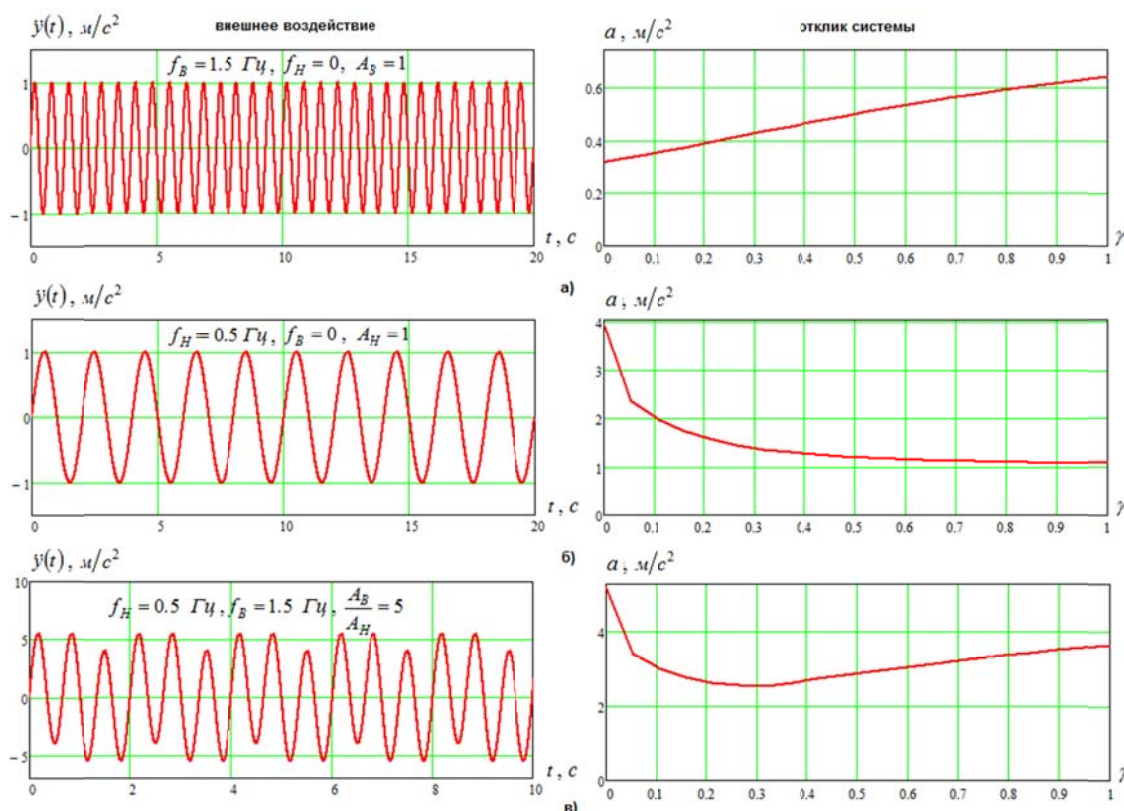


Рисунок 1. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования для случаев:

а) высокочастотного воздействия ($f_B = 1.5 \text{ Гц}$, $f_H = 0$, $A_B = 1$);

б) низкочастотного воздействия ($f_H = 0.5 \text{ Гц}$, $f_B = 0$, $A_H = 1$);

в) двухчастотного воздействия ($f_B = 1.5 \text{ Гц}$, $f_H = 0.5 \text{ Гц}$, $A_B/A_H = 5$)

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

В результате определялась зависимость максимальных абсолютных ускорений $a = \max_t |\ddot{x}(t) + \dot{y}(t)|$ от линейного коэффициента демпфирования γ . Результаты такого нагружения, представленные на рисунке 1в, показывают, что существует оптимальное, «компромиссное» демпфирование.

2. Поиск оптимального демпфирования для репрезентативной выборки случайных сейсмических воздействий

2.1. Постановка задачи

Ниже рассматривается моделирование сейсмического воздействия случайными процессами. Такая постановка задачи исходит из стохастической природы землетрясения [9–12].

Если внешние воздействия являются случайными функциями, то возможны различные постановки задачи оптимизации для модели (1).

1. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \max_t |\dot{y}_i(t) + \ddot{x}_i(t)|, \text{ при ограничениях } x = \max_t |x_i(t)| \leq h, \quad (2)$$

где h – максимально возможные по конструктивным соображениям перемещения ЗО относительно фундамента (за счет работы ССИ);

$\max_t |\dot{y}_i(t) + \ddot{x}_i(t)|$ – усредненные по i абсолютные ускорения ЗО (оценка математического ожидания);

i – номер реализации внешнего воздействия в репрезентативной выборке этих воздействий.

2. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \max_i \max_t |\dot{y}_i(t) + \ddot{x}_i(t)|, \text{ при ограничениях } x = \max_t |x_i(t)| \leq h. \quad (3)$$

Если известна плотность распределения максимальных абсолютных ускорений ЗО, то можно установить так называемый «коэффициент пиковости». Он связывает с заданной доверительной вероятностью среднеквадратические значения (по i) максимальных абсолютных ускорений с их максимальными значениями. В этом случае 1 и 2-я постановка задачи совпадают.

3. Целевая функция

$$\min_{\gamma} \sqrt{D}, \text{ при ограничениях } x = \max_t |x_i(t)| \leq h, \quad (4)$$

где D – дисперсия стационарного эргодического процесса, каковым считается изменение во времени абсолютных ускорений ЗО.

Основная проблема при такой стохастической постановке задачи – моделирование сейсмического воздействия случайными процессами. Существует ряд подходов к заданию автокорреляционных функций сейсмических воздействий и синтезированию на их основе акселерограмм [13–15]. При статистическом анализе сейсмоизолированных систем необходимо, чтобы одновременно значения автокорреляционных функций смещения и ускорения в нуле равнялись среднему уровню расчетных смещений и ускорений (соответственно). Эта проблема подробно исследована в работе [16].

Методика генерирования воздействий, в которых одновременно реализуются фактические средние значения смещения и ускорения, предложена в работе [17]. Эта методика генерации случайных сейсмических воздействий была использована ниже для поиска оптимального демпфирования.

Методом статистического моделирования был получен пакет искусственных акселерограмм объемом $N = 300$. Параметры синтезируемых акселерограмм соответствуют району г. Сочи [18]. В качестве исходных данных для построения пакета расчетных акселерограмм приняты расчетные значения пиковых смещений и ускорений основания $U_{\max} = 0.2$ м и $a = 2.3$ м/с². Преобладающие периоды воздействия приняты равными 1.3 с и 0.5 с.

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

2.2. Числовой расчет

На каждую синтезированную акселерограмму пакета проводился расчет системы с одной степенью свободы со следующими параметрами:

- частота сейсмоизолированной системы равна 0.4 Гц;
- коэффициент линейного демпфирования варьируется от 0 до 1.

Поиск оптимального демпфирования осуществлялся методом Монте-Карло, т. е. критерий (2) вычислялся через определение отклика модели (1) с последующим осреднением. Пример реализации одного варианта расчета показан на рисунке 2.

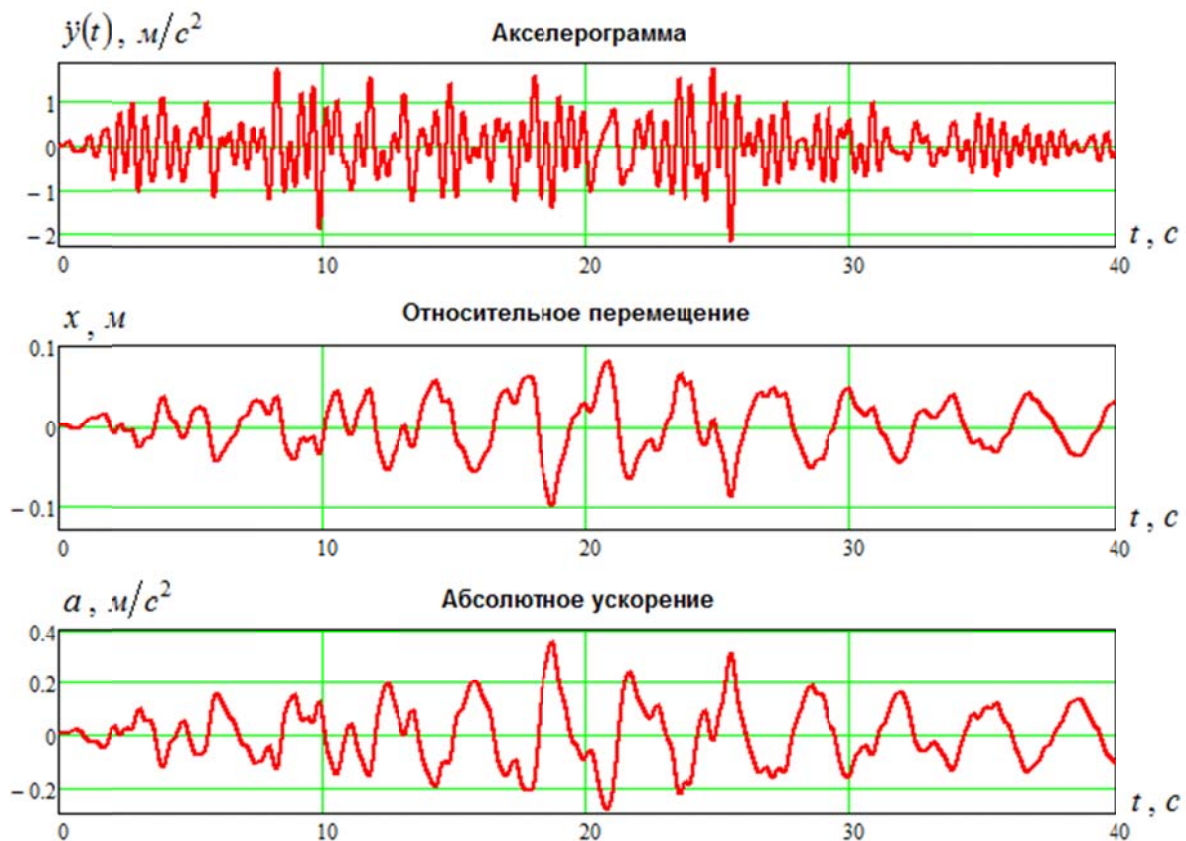


Рисунок 2. Пример реализации варианта расчета на синтетическую акселерограмму

В результате расчетов на 300 акселерограмм были получены смещения и ускорения при разных значениях γ (рис. 3). Согласно рисунку 3 оптимальный коэффициент линейного демпфирования $\gamma = 0.1$.

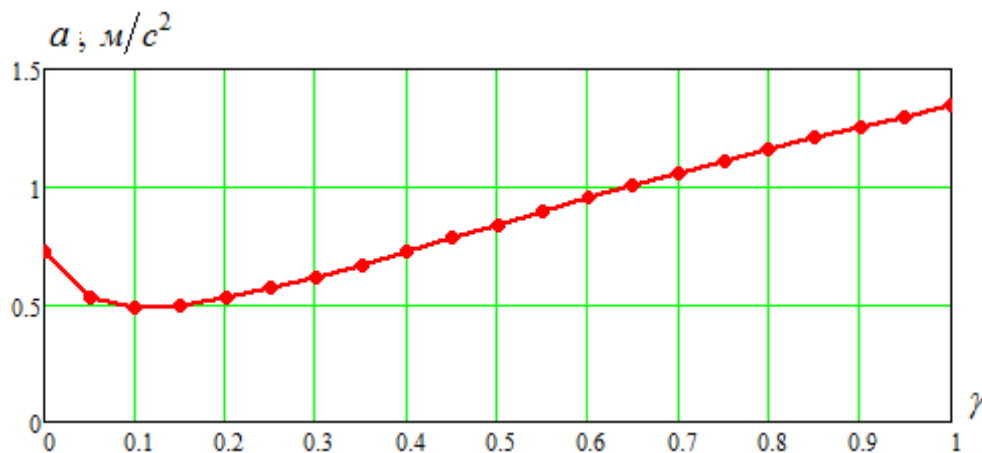


Рисунок 3. Зависимость абсолютных ускорений от коэффициента демпфирования

Затем были вычислены математические ожидания M и среднеквадратические отклонения указанных показателей σ , построены функции плотности распределений рассматриваемых величин, соответствующие гистограммы распределений (рис. 4). Анализ результатов моделирования показал, что характеристики (усилия, смещения, ускорения) работы сейсмоизолированной системы описываются логнормальным законом распределения.

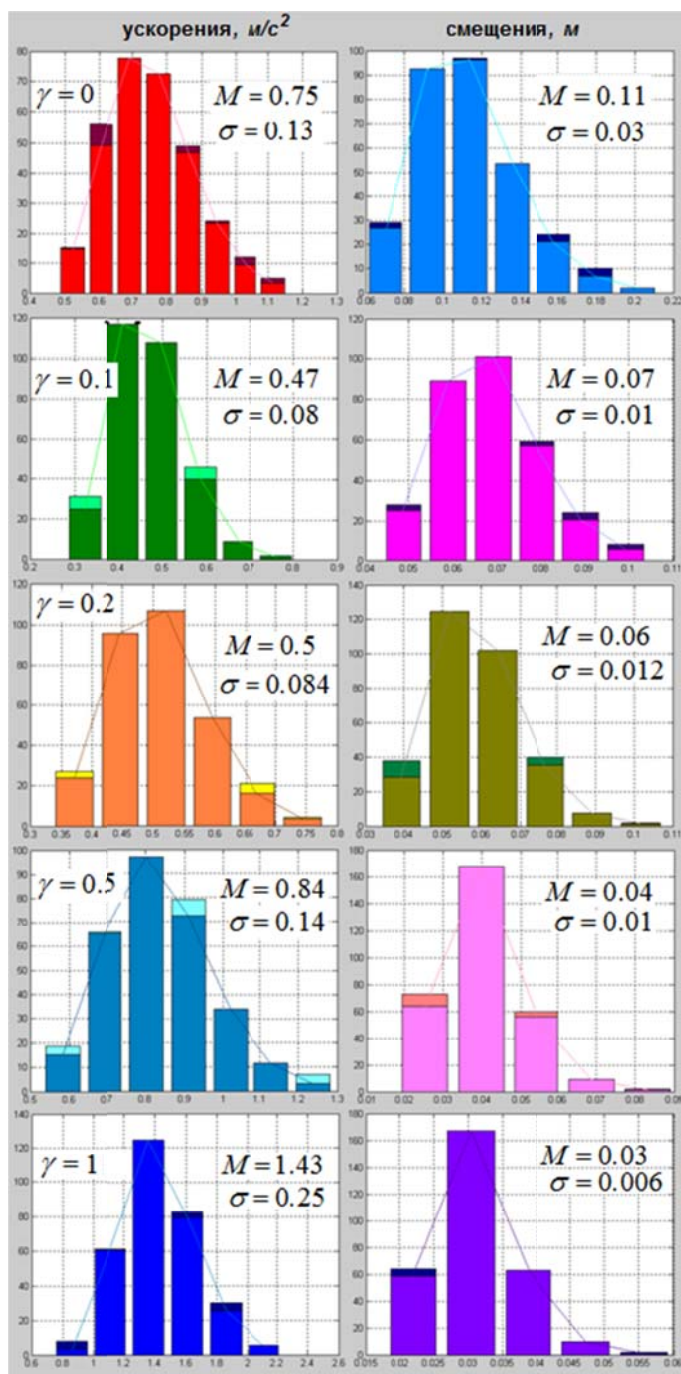


Рисунок 4. Гистограммы распределения максимального ускорения и смещения

2.3. Оценка спектральной плотности

Была рассмотрена и другая постановка задачи оптимизации – (4). Она заключается в определении спектральной плотности процесса, который считается эргодичным и стационарным.

В этом случае постановка задачи оптимизации для модели будет следующей:

целевая функция – $\min_{\gamma} \tilde{a}$,

где $\tilde{a} = \sqrt{D}$ – среднеквадратическое значение абсолютных ускорений ЗО:

$$D = \int_0^{\infty} S(\omega) d\omega; \quad (5)$$

$S(\omega)$ – спектральная плотность абсолютных ускорений:

$$S_{\ddot{u}_{abc}}(\omega) = H(\omega) S_{\dot{v}_x}(\omega); \quad (6)$$

$H(\omega)$ – передаточная функция;

$S_{\dot{v}_x}(\omega)$ – спектральная плотность ускорений грунта на входе.

В случае перехода от ускорений основания к абсолютным ускорениям ЗО передаточная функция имеет следующий вид [18]:

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{1 + \frac{(4 \cdot \gamma^2 \cdot \omega)^2}{p^2}}}{\sqrt{\left[1 - \frac{\omega^2}{p^2}\right]^2 + \frac{4 \cdot \gamma^2 \cdot \omega^2}{p^2}}}. \quad (7)$$

Для синтетических акселерограмм $S_{\dot{v}_x}(\omega)$ определяется по формуле Хинчина [8]:

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (8)$$

где $K(\tau)$ – автокорреляционная функция ускорений, находится по рекомендациям [16].

Определенные трудности возникают при оперировании реальными акселерограммами [19].

Если имеется набор из N реализаций $x_k(t)$, $(k-1)T \leq t \leq kT$, $k = 1, 2, \dots, N$ стационарного эргодического случайного процесса $\{x(t)\}$, то оценка спектральной плотности имеет вид [20]:

$$S_{\dot{v}_x}(f) = \frac{2}{N \cdot T} \sum_{k=1}^N |X_k(f, T)|^2, \quad (9)$$

где T – длина каждого процесса;

$X_k(f, T)$ – финитное преобразование Фурье для k -й реализации:

$$X_k(f, T) = \int_0^T x_k(t) \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot t} dt.$$

Применительно к реализации случайного процесса пример определения $X_k(f, T)$ с помощью математического пакета MathCad показан на рисунке 5 (частота среза – 33 Гц).

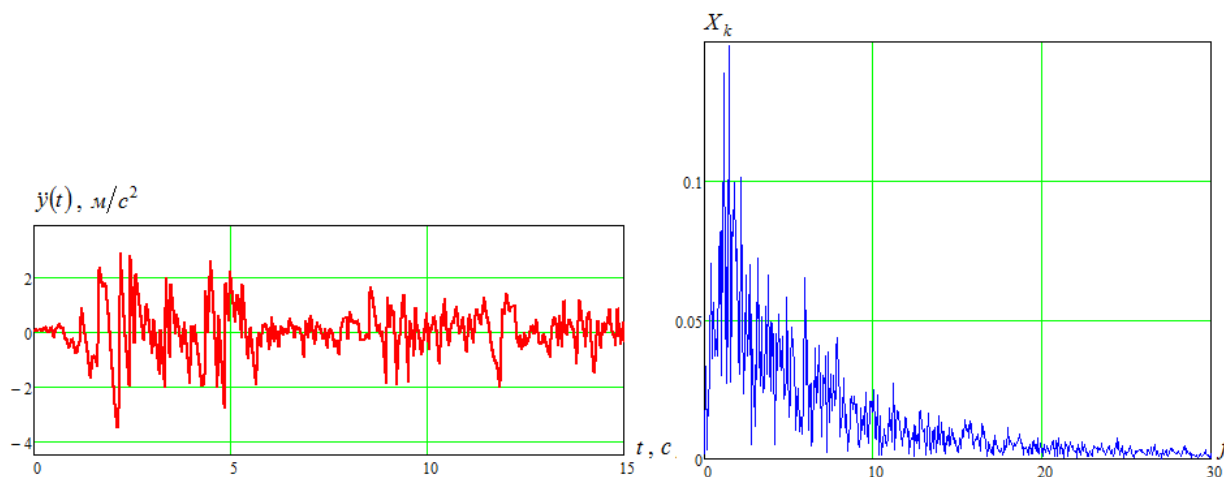


Рисунок 5. Нестационарное сейсмическое воздействие и его финитное преобразование Фурье

Далее последовательно используются формулы (6)–(9). В результате варьирования коэффициента линейного демпфирования γ от 0 до 1 получаем следующую зависимость дисперсии процесса от γ (рис. 6).

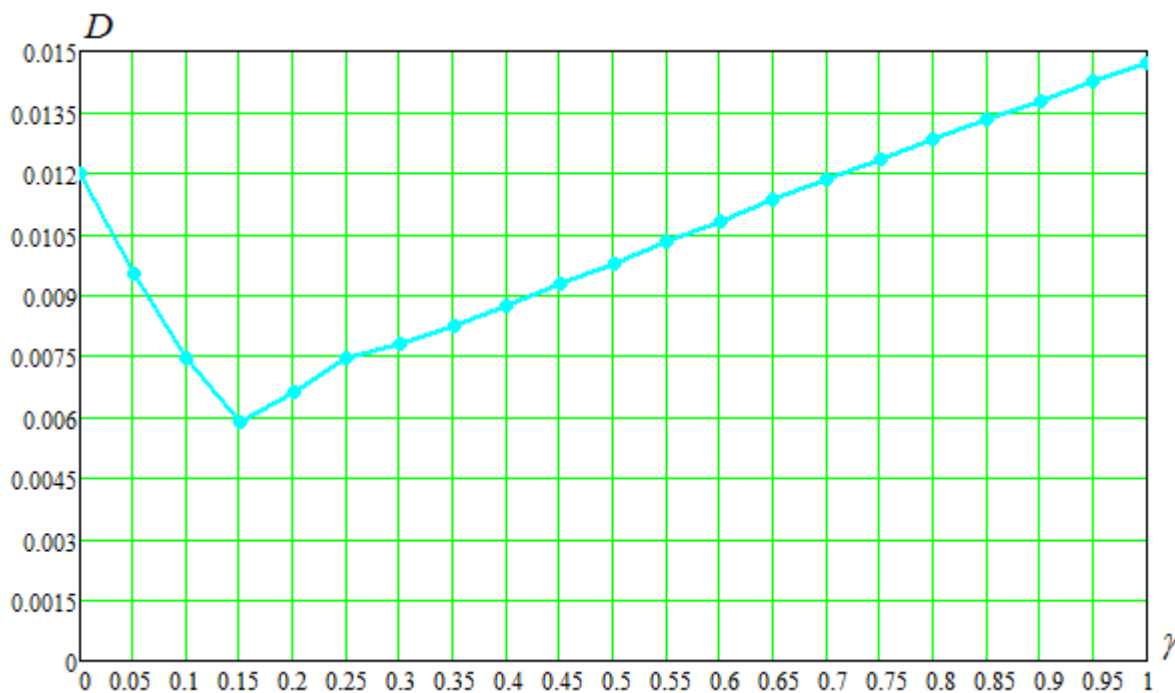


Рисунок 6. Зависимость дисперсии процесса от коэффициента демпфирования

3. Нелинейная постановка задачи

Для нелинейной модели использование передаточной функции невозможно. Поэтому идет прямое усреднение отклика.

Рассмотрим маятниковую ССИ с упругопластическими демпферами [21]. В этом случае уравнение колебаний динамической системы «ЗО – ССИ» имеет вид:

$$\ddot{x} + p^2 \cdot x + f(x, \dot{x}) = -\ddot{y}(t), \quad (10)$$

где $p = \sqrt{\frac{g}{l}}$;

$f(x, \dot{x})$ – суммарная билинейная силовая характеристика (с упругой разгрузкой) демпферов, приведенная к единичной массе.

Функция $f(x, \dot{x})$ характеризуется 3 параметрами:

- p_1, p_2 – частоты, соответствующие первому и второму участку билинейной силовой характеристики;
- f_T – приведенное к единичной массе усилие (ускорение), соответствующее переходу от первого участка характеристики ко второму.

На репрезентативную выборку воздействий производился расчет вышеописанной нелинейной системы с фиксированными параметрами $p = 0.4 \text{ Гц}$, $p_1 = 20 \text{ Гц}$ и $p_2 = 0.2 \text{ Гц}$. Параметр f_T варьировался от 0 до 0.2 м/с^2 . Возможность варьирования этого параметра показана в [21]. За критерий оптимальности был взят критерий (2). Из рисунка 7 видно, что оптимум демпфирования при такой постановке задачи существует.

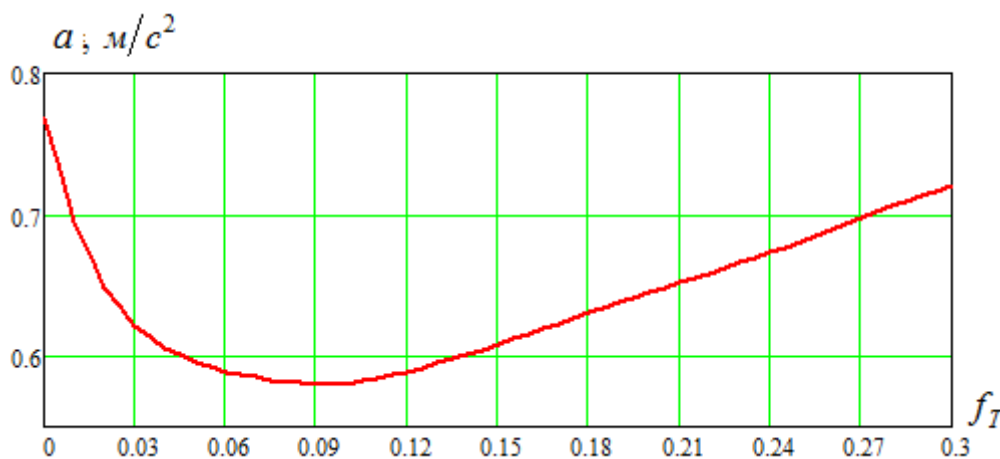


Рисунок 7. Результаты по нелинейной задаче

Заключение

В статье рассмотрена задача поиска оптимальных параметров демпфирования в ССИ. На простейшей модели показана качественная сторона проблемы.

Рассмотрена стохастическая постановка задачи и сформулированы различные критерии оптимизации параметров демпфирования.

Для минимизации абсолютных ускорений ЗО предложен алгоритм поиска оптимальных параметров, основанный на усреднении результатов численных реализаций процесса колебаний в системе «ЗО – ССИ» (то есть на методе Монте-Карло). При минимизации дисперсии абсолютных ускорений ЗО для поиска оптимума использовалась спектральная теория случайных процессов. Задача оптимизации параметров нелинейных (упругопластических) демпферов также решалась методом Монте-Карло.

Приведены примеры расчета для каждого из вышеперечисленных критериев оптимизации. Из этих примеров видно, что оптимизация параметров демпфирования может уменьшить критериальный параметр в 1.5–2 раза, т. е. значительно повысить качество ССИ.

Литература

1. Уздин А.М., Елизаров С.В., Белаш Т.А. Сейсмостойкие конструкции транспортных зданий и сооружений. М.: УМЦ по образам. на ж.-д. трансп., 2012. 501 с.
2. Uzdin A.M. Why the overdamped isolation is better than undamped one // Abstract book of ASSISI 10th World Conference on Seismic Isolation Energy Dissipation and Active Vibrations Control of Structures. Istanbul, 2007. Pp. 69–74.
3. Давыдова Г.В. Влияние демпфирования на статистические характеристики сейсмоизолированных зданий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2008. №1. С. 38–43.
4. Dolgaya A.A. Base isolated structures resistant control theory and application of base isolation in Russia // ASME. Pressure Vessels and Piping Conference. 1998. Vol. 379 (Seismic, Shock and Vibration Isolation). Pp. 71–78.
5. Skinner R.I. Hysteretic dampers for earthquake – resistance structures // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1975. Vol. 3–3. Pp. 287–293.
6. Robinson W.N. An extrusion energy absorber suitable for the protection structures during an earthquake. // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. 1976. Vol. 3–4. Pp. 251–259.
7. Рутман Ю.Л. Маятниковые сейсмоизолирующие опоры. Конструкция. Расчет. Эксперимент // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.
8. Бидерман В.Л. Теория механических колебаний. М.: Высшая школа, 1980. 408 с.
9. Сейсмический риск и инженерные решения. Пер. с англ. / Под ред. Ц. Ломнитца и Э. Розенблюта. М.: Недра, 1981. 375 с.
10. Болотин В.В. Статистическая теория сейсмостойкости сооружений // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1959. №4. С. 123–129.
11. Айзенберг Я.М. Генерирование расчетного ансамбля синтетических акселерограмм и исследование влияния их параметров на сейсмическую реакцию сооружений // Расчет и проектирование зданий для сейсмоопасных районов. М.: Наука, 1988. С. 5–14.
12. Housner G.W. Characteristics of strong motion earthquake // Bulletin of the Seismological Society of America. 1947. Vol. 37. Pp. 19–31.
13. Елизаров С.В. Особенности применения метода случайного моделирования в задачах расчета сейсмоизоляции сооружений // Сборник трудов Международной конференции: Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте. СПб, 2008. С. 100–104.
14. Смирнов В.И., Вахрина Г.Н. Развитие моделей расчетных акселерограмм сейсмических воздействий // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2011. №4. С. 26–34.
15. Ветошкин В. А. Синтезированная модель сейсмического воздействия // Расчет сейсмостойкости энергетического оборудования. Сборник статей. Труды ЦКТИ 212. Л., 1984. С. 41–52.
16. Давыдова Г.В. Статистический метод расчета систем сейсмоизоляции зданий и сооружений: Дисс.... канд. техн. наук. СПб., СПбГАСУ, 2010. 157 с.
17. Уздин А.М., Давыдова Г.В. Некоторые особенности задания сейсмического воздействия при статистическом моделировании колебаний сейсмоизолированных систем // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2008. №6. С. 29–32.
18. Рекомендации по заданию сейсмических воздействий для расчета зданий разной степени ответственности. СПб.–Петропавловск-Камчатский: КамЦентр, 1996. 12 с.
19. Алешин А.С. Макросейсмические основы сейсмического микрорайонирования // Вопросы инженерной сейсмологии. 2011. Т. 38. №4. С. 15–28.
20. Bendat J.S., Pirsol A.G. Engineering applications of correlation and spectral analysis. New York: John Wiley & Sons, 1978. 312 p.
21. Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л. Оценка эффективности параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции // Инженерно-строительный журнал. 2012. №1(27). С. 37–43.

**Надежда Владимировна Ковалева, Санкт-Петербург, Россия
Тел. моб.: +7(911)8355552; эл. почта: balloun@yandex.ru*

© Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В., 2013

Ковалева Н.В., Рутман Ю.Л., Давыдова Г.В. Определение оптимальных параметров демпфирования в системах сейсмоизоляции

doi: 10.5862/MCE.40.12

Determination of optimal damping parameters for seismic isolation systems

N.V. Kovaleva,*Saint Petersburg State University of Sea and Technology, Saint Petersburg, Russia***Yu.L. Rutman,***Saint-Petersburg State University of Architecture and Civil Engineering, Saint Petersburg, Russia***G.V. Davydova,***LLC "Geoinzhproekt", Saint Petersburg, Russia**+7(911)835-55-52; e-mail: balloun@yandex.ru*

Key words

seismic isolation; optimal damping parameters; seismic motions; synthesized accelerograms; spectral density; dispersion

Abstract

If seismic isolation system consists of elastic-damping bearings, it transforms protected object into the flow-frequency system. Thus, damping in SIS should be high enough to eliminate resonance effect. Therefore application of damping makes a problem of its parameters optimization relevant.

Optimization criteria for damping parameters of seismic isolation systems within the stochastic problem definition have been stated in the article. Search methods of optimal parameters for various tasks descriptions (target functions) have been developed. Both synthesized accelerograms and real accelerograms of earthquakes have been used as external actions. Both linear and nonlinear damping model including seismic isolation system have been taken into consideration.

Search algorithms of optimal parameters have been worked out in different cases. Proceeded analysis results can be applied to design damping in seismic isolation systems.

References

1. Uzdin A.M., Elizarov S.V., Belash T.A. *Seysmostoykiye konstruksii transportnykh zdaniy i sooruzheniy* [Aseismic designs of transport buildings and constructions]. Moscow: UMTs po obrazov. na zh.-d. transp., 2012. 501 p. (rus)
2. Uzdin A.M. Why the overdamped isolation is better than undamped one. *Abstract book of ASSISi 10th World Conference on Seismic Isolation Energy Dissipation and Active Vibrations Control of Structures*. Istanbul, 2007. Pp. 69–74.
3. Davydova G.V. *Earthquake engineering. Safety of structures*. 2008. No.1. Pp. 38–43. (rus)
4. Dolgaya A.A. Base isolated structures resistant control theory and application of base isolation in Russia. *ASME. Pressure Vessels and Piping Conference*. 1998. Vol. 379 (Seismic, Shock and Vibration Isolation). Pp. 71–78.
5. Skinner R.I. Hysteretic dampers for earthquake – resistance structures. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1975. Vol.3–3. Pp. 287–293.
6. Robinson W.N. An extrusion energy absorber suitable for the protection structures during an earthquake. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*. 1976. Vol.3–4. Pp. 251–259.
7. Rutman Yu.L. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.1(27). Pp. 37–43. (rus)
8. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebaniy* [Theory of mechanical fluctuations]. Moscow: Vysshaya shkola, 1980. 408 p. (rus)
9. *Seismicheskiy risk i inzhenernyye resheniya* [Seismic risk and engineering decisions]. Translated from English. Edited by Ts. Lomnits, E. Rozenbliut. Moscow: Nedra, 1981. 375 p. (rus)
10. Bolotin V.V. *Izv. AN SSSR. Mekhanika I mashinostroyeniye*. 1959. No.4. Pp. 123–129. (rus)
11. Aizenberg Ia.M. *Raschet i proyektirovaniye zdaniy dlya seysmoopasnykh rayonov* [Calculation and design of buildings for seismodangerous areas]. Moscow: Nauka, 1988. Pp. 5–14. (rus)
12. Housner G.W. Characteristics of Strongmotion Earthquake. *Bulletin of the Seismological Society of America*. 1947. Vol. 37. Pp. 19–31.

Kovaleva N.V., Rutman Yu.L., Davydova G.V. Determination of optimal damping parameters for seismic isolation systems

13. Elizarov S.V. *Sbornik trudov Mezhdunarodnoy konferentsii: Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte* [Abstract book of World Conference: Problems of durability of materials and constructions on transport]. Saint-Petersburg, 2008. Pp. 100–104. (rus)
14. Smirnov V.I., Vakhrina G.N. *Earthquake engineering. Safety of structures*. 2011. No.4. Pp. 26–34. (rus)
15. Vetoshkin V. A. *Raschet seysmostoykosti energeticheskogo oborudovaniya. Sbornik statey. Trudy TsKTI 212* [Calculation of the aseismic power equipment. Abstract book]. Leningrad, 1984. Pp. 41–52. (rus)
16. Davydova G.V. *Statisticheskiy metod rascheta sistem seysmoizolyatsii zdaniy i sooruzheniy* [Statistical method of calculation seismoisolation systems of buildings and constructions]. PhD thesis. Saint-Peterburg., SPbGASU, 2010. 157 p. (rus)
17. Uzdin A.M., Davydova G.V. *Earthquake engineering. Safety of structures*. 2008. No.6. Pp. 29–32. (rus)
18. *Rekomendatsii po zadaniyu seysmicheskikh vozdeystviy dlya rascheta zdaniy raznoy stepeni otvetstvennosti* [Recommendations for tasking seismic influences for calculation buildings of different degree of responsibility]. Saint-Petersburg–Petropavlovsk-Kamchatskii: KamTsentr, 1996. 12 p. (rus)
19. Aleshin A.S. *Problems of Engineering Seismology*. 2011. Vol. 38. No.4. Pp. 15–28. (rus)
20. Bendat J.S., Pirsol A.G. *Engineering Applications of Correlation and Spectral Analysis*. New York: John Wiley & Sons, 1978. 312 p.
21. Kovaleva N.V., Rutman Yu.L. *Magazine of Civil Engineering*. 2012. No.1(27). Pp. 37–43. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 107–115