

Численный анализ влияния промерзания грунта в зоне прокладки на тепловые потери бесканальных теплопроводов

К.т.н., доцент В.Ю. Половников;
Магистрант В.А. Хузеев,*

ФГБОУ ВПО Национальный исследовательский Томский политехнический университет

Ключевые слова: тепловые сети; тепловые потери; промерзание грунта; бесканальный теплопровод

Исследованиям эксплуатационных режимов сетей теплоснабжения уделяется пристальное внимание в современной российской научно-технической литературе [1–7]. Объясняется это необходимостью интенсивной модернизации тепловых сетей [1–4] и разработки новых подходов к анализу тепловых режимов теплопроводов [7].

Бесканальные теплопроводы [8], как часть энергетического оборудования систем теплоснабжения, являются наиболее перспективным способом прокладки тепловых сетей. А сочетание бесканальной прокладки с использованием предварительно изолированных теплопроводов заводской готовности [3–6] позволяет отнести такую конструкцию к энергосберегающим системам транспорта тепловой энергии.

Несмотря на то, что опыт эксплуатации бесканальных теплопроводов имеет более чем полувековую историю [8], их проектирование и анализ основаны на упрощенных аналитических соотношениях [9], в которых не учитываются многие особенности теплопереноса, реализующиеся в рассматриваемых системах. К этим особенностям относятся нестационарность процессов переноса, наличие теплообмена с расположенными в зонах прокладки инженерными сооружениями, сезонное промерзание и оттаивание грунта в зоне прокладки, изменение термического сопротивления грунта, взаимодействие теплопроводов с окружающей средой и др.

Целью работы является численное моделирование теплопереноса в зоне прокладки бесканальных теплопроводов при промерзании грунта и анализ тепловых потерь рассматриваемых объектов в подобных условиях.

Постановка задачи

Рассматривается типичный теплопровод бесканальной прокладки – трубопроводы, изолированные пенополиуретаном и защитным покровным гидроизоляционным слоем из полиэтилена [10] (рисунок 1). Предполагается, что теплопровод эксплуатируется в условиях промерзания грунта в зоне прокладки. Для рассматриваемой области (рисунок 1) решается двумерная стационарная задача теплопереноса в системе «подземный бесканальный теплопровод – окружающая среда». Решение нестационарной задачи теплопереноса для рассматриваемой системы не является целесообразным, поскольку нестационарные режимы работы теплопроводов наблюдаются только при вводе тепловых сетей в эксплуатацию после плановых или внеплановых остановок и не являются характерными режимами их работы [7].

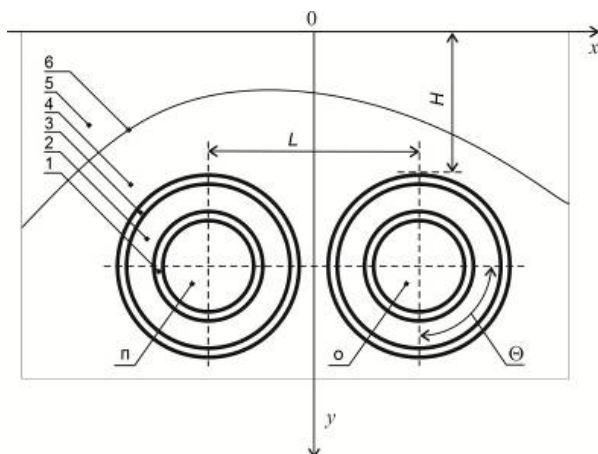


Рисунок 1. Схема области решения:
1 – металлическая стенка трубы; 2 – теплоизоляционный слой; 3 – слой гидроизоляции;
4 – грунт талый; 5 – грунт мерзлый; 6 – граница раздела между талым и мерзлым грунтом; п, о – подающий и обратный теплопроводы; H – расстояние от поверхности грунта до верхних точек слоев гидроизоляции; L – расстояние между осями теплопроводов

В настоящее время имеется ряд работ [11–14], посвященных исследованию тепловых режимов и тепловых потерь бесканальных теплопроводов. В них приведены результаты анализа влияния различных эксплуатационных факторов на тепловые потери бесканальных теплотрасс, а также описаны проблемы, связанные с проектированием и эксплуатацией предизолированных бесканальных трубопроводов тепловых сетей. При этом в работах [7, 9, 11–14] не учитываются возможное промерзание грунта в зоне прокладки и изменение его теплофизических характеристик. Однако в [15] указано, что в большинстве регионов России наблюдается сезонное промерзание грунтов с существенными глубинами нулевой изотермы.

При постановке задачи приняты следующие допущения.

1. На границах между слоями выполняются условия идеального теплового контакта (рисунок 1).
2. Теплофизические свойства веществ являются постоянными и известными величинами.
3. Не рассматриваются процессы теплопереноса в теплоносителях подающего и обратного трубопроводов.
4. Потери тепла не влияют на температуру внутренней поверхности трубы. Считается, что на внутренней поверхности труб подающего и обратного трубопроводов поддерживаются постоянные температуры, равные температурам теплоносителей.
5. Предполагается, что в стационарном режиме отсутствуют фазовые переходы.
6. Граница раздела между талым и мерзлым грунтом (рисунок 1) имеет постоянную температуру, равную 273 К.

Принятые допущения не накладывают принципиальных ограничений на общность постановки задачи и отражают достаточно реальный режим работы бесканального трубопровода тепловой сети.

Математическая модель

Математическая модель базируется на традиционных подходах к моделированию физических процессов [7, 13, 14, 16–18] и в предлагаемой постановке будет описываться уравнениями теплопроводности в цилиндрической системе координат для стенок труб, теплоизоляционных и гидроизоляционных слоев подающего и обратного трубопроводов:

$$\frac{\partial^2 T_{i,n}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T_{i,n}}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 T_{i,n}}{\partial \Theta^2} = 0, \quad i=1-3; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T_{i,o}}{\partial x^2} + \frac{1}{x} \frac{\partial T_{i,o}}{\partial x} + \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 T_{i,o}}{\partial \Theta^2} = 0, \quad i=1-3; \quad (2)$$

в талом и мерзлом грунте уравнениями теплопроводности в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_i}{\partial y^2} = 0, \quad i=4, 5. \quad (3)$$

При постановке задачи принималось, что на внутренних поверхностях труб подающего и обратного трубопроводов поддерживается постоянная температура, равная температуре теплоносителя в трубе:

$$T_{1,n} = T_n = const, \quad (4)$$

$$T_{1,o} = T_o = const. \quad (5)$$

На границах слоев реализуются условия идеального теплового контакта:

$$\lambda_i \frac{\partial T_{i,n}}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial T_{j,n}}{\partial x}, \quad T_{i,n} = T_{j,n}, \quad i,j=1-4; \quad i \neq j; \quad (6)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_{i,n}}{\partial y} = \lambda_j \frac{\partial T_{j,n}}{\partial y}, \quad T_{i,n} = T_{j,n}, \quad i,j=1-4; \quad i \neq j; \quad (7)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_{i,o}}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial T_{j,o}}{\partial x}, \quad T_{i,o} = T_{j,o}, \quad i, j=1-4; \quad i \neq j; \quad (8)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_{i,o}}{\partial y} = \lambda_j \frac{\partial T_{j,o}}{\partial y}, \quad T_{i,o} = T_{j,o}, \quad i, j=1-4; \quad i \neq j; \quad (9)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial x}, \quad T_i = T_j, \quad i, j=4, 5; \quad i \neq j; \quad (10)$$

$$\lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial y} = \lambda_j \frac{\partial T_j}{\partial y}, \quad T_i = T_j, \quad i, j=4, 5; \quad i \neq j. \quad (11)$$

Для цилиндрических слоев выполняются условия симметрии:

$$\frac{\partial T_{i,p}}{\partial \Theta} = 0, \quad i=1-3; \quad (12)$$

$$\frac{\partial T_{i,o}}{\partial \Theta} = 0, \quad i=1-3. \quad (13)$$

На поверхности раздела «мерзлый грунт – окружающая среда» реализуются условия конвективного теплообмена:

$$-\lambda_5 \frac{\partial T_5}{\partial y} = \alpha (T_5 - T_7). \quad (14)$$

На достаточно большом расстоянии от теплопровода (рисунок 1) градиенты температур в грунте равны нулю:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \quad i=4, 5; \quad (15)$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial y} = 0, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (16)$$

Здесь приняты следующие обозначения: T – температура, К; x, y, Θ – координаты; λ – коэффициент теплопроводности, Вт/(м·К); α – коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К). Индексы: 1–5 – номера областей расчета (рисунок 1); 7 – окружающая среда; п, о – подающий и обратный трубопроводы соответственно.

Метод решения и исходные данные

Задача (1)–(16) решена методом конечных элементов [19] с использованием аппроксимации Галеркина [20, 21]. Исследования проводились на неравномерной конечно-элементной сетке, имеющей 32669 узлов и состоящей из 25104 элементов. Количество элементов выбиралось из условий сходимости решения, сгущение сетки проводилось методом Делоне [21].

Особенность решения задачи (1)–(16) состояла в том, что координаты границы раздела «талый грунт – мерзлый грунт» (рисунок 1) определялись по координатам изотермической линии $T=273$ К в результате серии численных экспериментов методом последовательных приближений.

Несмотря на то, что при постановке задачи предполагалось использование области решения неограниченных размеров (выражения (15)–(16)), при проведении численного моделирования использовалась расчетная область размерами 6 м в глубину и по 5 м в стороны от оси симметрии. Размеры расчетной области выбирались на основании серии предварительных численных расчетов таким образом, чтобы относительное изменение температур на границах области решения не превышало 0,5%.

Исследования проводились для трубопроводов с диаметрами условного прохода 600 мм, изготовленных из стали 10 (толщина стенки 8 мм), тепловая изоляция – пенополиуретан (толщина 40 мм) [10], кровельный слой – полиэтилен (2 мм) [10]. Расстояние от поверхности грунта до верхних точек слоев гидроизоляции принималось $H = 2$ м, а между осями трубопроводов составляло $L = 1,3$ м (рисунок 1). Температуры $T_n = 338$ К и $T_o = 323$ К принимались по среднегодовым температурам теплоносителей в подающих и обратных трубопроводах водяных тепловых сетей при их работе по температурному графику 95/70 С [9]. Температура окружающей среды T_7 принималась равной средней температуре воздуха за отопительный период в городе Томске [15] – 264,2 К. Средний коэффициент теплоотдачи на поверхности раздела «мерзлый грунт – окружающая среда» составлял $\alpha = 5$ Вт/(м²·К).

В таблице 1 приведены значения [22] теплопроводности (λ), теплоемкости (C) и плотности (ρ) грунтов, стенки трубы, тепловой и гидроизоляции, использовавшиеся при проведении численных исследований (рисунок 1).

Таблица 1. Теплофизические характеристики

Материал	Гидроизоляция	Тепловая изоляция	Стенка трубы	Грунт			
				Глинистый		Песчаный	
				Талый	Мерзлый	Талый	Мерзлый
λ , Вт/(м·К)	0,33	0,033	50,2	1,1	1,3	2,3	3,7
C , Дж/(кг·К)	2200	1470	462	1231	959	1486	1005
ρ , кг/м ³	920	50	7700	1700	1700	2000	2000

Результаты численного моделирования

Основные результаты численного исследования тепловых режимов бесканальных теплопроводов в условиях промерзания грунта в зоне прокладки приведены в таблице 2 и на рисунке 2.

Таблица 2. Результаты численного моделирования

Грунт	Q_1 , Вт/м	Q_2 , Вт/м	$Q_{норм}$, Вт/м	$\delta_1 = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} 100\%$	$\delta_1 = \frac{Q_2 - Q_{норм}}{Q_2} 100\%$
Песчаный	137,40	144,70	175,32	5,04	-21,16
Глинистый	100,48	102,17	129,73	1,65	-26,97

Обоснованность и достоверность результатов исследований следуют из проведенных проверок используемых методов на сходимость и устойчивость решений на множестве сеток, из выполнения условий баланса энергии на границах области расчета, а также подтверждаются хорошим качественным согласованием полученных результатов с известными данными других авторов [13, 14]. Относительная погрешность расчетов во всех вариантах численного анализа не превышала 0,2%, что является приемлемым при оценке тепловых потерь бесканальных теплопроводов.

В таблице 2 приведены тепловые потери рассматриваемой системы (рисунок 1) без учета промерзания Q_1 и с учетом промерзания грунта Q_2 , а также представлено сопоставление Q_1 и Q_2 между собой и с нормативной величиной потерь $Q_{норм}$, вычисленной в соответствии с [9].

Результаты численного моделирования тепловых потерь бесканальных теплопроводов, приведенные в таблице 2, свидетельствуют об ожидаемом росте тепловых потерь при прокладке теплопроводов в песчаных грунтах, имеющих большие коэффициенты теплопроводности (таблица 1).

Учет промерзания грунта в зоне прокладки сопровождается соответствующим ростом тепловых потерь вследствие изменения теплофизических характеристик грунта при замерзании (таблица 1). Сопоставление значений тепловых потерь бесканальных теплопроводов с учетом Q_2 и без учета промерзания грунта Q_1 позволяет сделать вывод о том, что при прокладке теплопроводов в песчаных грунтах потери тепла возрастают на $\delta_1 = 5,04\%$, а в глинистых – на $\delta_1 = 1,65\%$ (таблица 2).

Половников В.Ю., Хузеев В.А. Численный анализ влияния промерзания грунта в зоне прокладки на тепловые потери бесканальных теплопроводов

Сопоставление результатов численного моделирования (таблица 2) в условиях промерзания грунта Q_2 с величиной тепловых потерь $Q_{\text{норм}}$, рассчитанных с использованием методики [9], позволяет утверждать, что отклонение между ними δ_2 всегда является отрицательной величиной. Это обстоятельство свидетельствует о том, что методика [9] дает завышенные значения тепловых потерь бесканальных теплопроводов. Отклонение δ_2 составляет минус 21,16% и минус 26,97% при прокладке теплопроводов в песчаных и глинистых грунтах соответственно.

На рисунке 2 в качестве примера приведено типичное температурное поле в зоне размещения бесканального теплопровода в условиях промерзания грунта при прокладке в глинистом грунте. На рисунке 2 изотермическая линия 273 К соответствует границе раздела «мерзлый грунт – талый грунт».

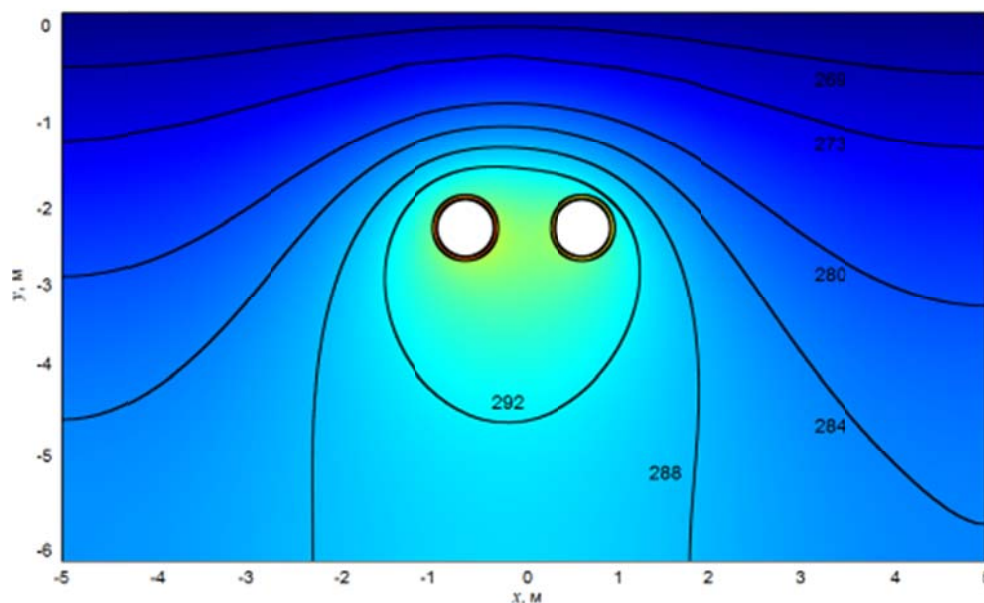


Рисунок 2. Типичное температурное поле для рассматриваемой области решения

Распределения температур в рассматриваемой области решения свидетельствуют о том, что изотермические линии (рисунок 2) сгущаются непосредственно над трубопроводами и более разрежены при удалении от них, что соответствует представлениям о процессах теплопроводности в твердых телах и качественно соответствует результатам исследований [13, 14].

Выводы

Проведены численное моделирование теплопереноса в зоне прокладки бесканальных теплопроводов при промерзании грунта и анализ тепловых потерь рассматриваемых объектов в подобных условиях.

Установлены масштабы увеличения тепловых потерь бесканальных теплопроводов в условиях промерзания грунта в зоне прокладки.

Показана необходимость корректировки действующей методики проектирования тепловой изоляции [9].

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №12-08-00201-а и гранта Президента РФ №МК-1652.2013.8.

Литература

1. Слепченко В.С., Петраков Г.П. Повышение энергоэффективности теплоизоляции трубопроводов тепловых сетей северных и северо-восточных регионов России // Инженерно-строительный журнал. 2011. №4(22). С. 26-32.
2. Слепченко В. С., Петраков Г.П. Система теплоснабжения Санкт-Петербурга на современном этапе и возможности ее модернизации // Инженерно-строительный журнал. 2009. №7. С. 26-29.
3. Ватин Н.И., Дубов В.В., Петраков Г.П. Внедрение РМД 41-11-2012 Санкт-Петербург «Устройство тепловых сетей в Санкт-Петербурге» // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2013. №1(6). С. 48-54.
4. Королев И.А., Петраков Г.П. Создание испытательного центра для проверки качества пенополиуретановой изоляции предизолированных трубопроводов, применяемых в системах теплоснабжения // Инженерно-строительный журнал. 2010. №1. С. 23-25.
5. Бухин В.Е. Предварительно изолированные трубопроводы для систем централизованного теплоснабжения // Теплоэнергетика. 2002. №4. С. 24-29.
6. Яровой Ю.В., Корсунский В.Х., Бурдыга Ю.Ю. О системе качества трубопроводов в ППУ изоляции НП «Российское теплоснабжение» // Энергобезопасность и энергосбережение. 2010. №1. С. 20-21.
7. Kuznetsov G.V., Polovnikov V.Yu. Numerical Investigation of Thermal Regimes in Twin-Tube-Channel Heat Pipelines Using Conductive-Convective Model of Heat Transfer // Thermal Engineering. 2012. Vol. 59. No. 4. Pp. 310-315.
8. Витальев В.П. Бесканальные прокладки тепловых сетей. М.: Энергоатомиздат, 1983. 280 с.
9. СП 41-103-2000. Проектирование тепловой изоляции оборудования и трубопроводов. М.: Госстрой России, 2001. 42 с.
10. Справочник проектировщика. Проектирование тепловых сетей / под ред. А.А. Николаева. Курган: Интеграл, 2010. 357 с.
11. Слепченко В.С., Рондель А.Н., Шаповалов Н.И. Влияние различных эксплуатационных факторов на тепловые потери в бесканальных подземных трубопроводах тепловой сети // Новости теплоснабжения. 2002. №6. С. 18-23.
12. Беляков В.А. Опыт и проблемы проектирования бесканальной и канальной прокладки теплопроводов в ППУ-изоляции // Новости теплоснабжения. 2007. №6. С. 32-33.
13. Иванов В.В., Вершинин Л.Б. Распределение температур и тепловых потоков в зоне подземных теплотрасс // Вторая Российская национальная конференция по теплообмену: Теплопроводность, теплоизоляция. М.: Издательство МЭИ, 1998. Т. 7. С. 103-105.
14. Иванов В.В., Шкробко С.В. Моделирование тепловых процессов подземных бесканальных теплотрасс // Вторая Российская национальная конференция по теплообмену: Теплопроводность, теплоизоляция. М.: Издательство МЭИ, 1998. Т. 7. С. 106-108.
15. СНиП 23-01-99. Строительная климатология. М.: Госстрой России, 2000. 57 с.
16. Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Transient heat and mass transfer at the ignition of vapor and gas mixture by a moving hot particle // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2010. Vol. 53. No.5-6. Pp. 923-930.
17. Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Distinctive features of the gas-phase ignition of a mixture of a kerosene vapor and air by a steel wire heated to high temperatures // Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2009. Vol. 82. No.6. Pp. 1059-1065.
18. Glushkov D.O., Strizhak P.A. Heat and Mass Transfer at Ignition of Solid Condensed Substance with Relatively Low Calorific Power by a Local Energy Source // Journal of Engineering Thermophysics. 2012. Vol. 21. No. 1. Pp. 69-77.
19. Garcia A.L. Numerical methods for physics. New York: Prentice Hall, 2000. 423 p.
20. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. New York: Oxford University Press, 2004. 480 p.
21. Шайдуров В.В. Многосеточные методы конечных элементов. М.: Наука, 1989. 288 с.
22. Гува А.Я. Краткий теплофизический справочник. Новосибирск: Сибвузиздат, 2002. 300 с.

**Вячеслав Юрьевич Половников, г. Томск, Россия
Тел. раб.: +7(3822) 42-08-33; эл. почта: polov@tpu.ru*

© Половников В.Ю., Хузеев В.А., 2013

doi: 10.5862/MCE.37.3

Numerical analysis of the effect of freezing ground in the laying zone pads on heat loss of channelless pipelines laid out without canals

V. Yu. Polovnikov;**V.A. Huzeev,***National Research Tomsk Polytechnic University, Tomsk, Russia**+7(3822) 42-08-33; e-mail: polov@tpu.ru*

Key words

strengthening; bendable constructions; carbon fiber

Abstract

The results of mathematical modeling of heating mains laid out without canals, as well as numerical analysis of their heat losses in the presence of ground freezing in the area of installation are presented.

The laws of heat transfer in the system and the factors influencing the intensification of heat losses are established. It was revealed that the regulatory calculation method of pipelines' heat losses gives overestimated values. It was found that the heat losses of pipelines subject to ground freezing in the laying zone rise by 1.65–5.04%. The deviation between the heat losses of pipelines is about 21–27%, taking into account the freezing ground in the laying zone and heat losses, calculated according to standard methods. That indicates the need to adjust the regulatory procedure.

These results suggest promising application of the developed approach to the analysis of thermal conditions and heat loss of heating mains laid out without canals in conditions of freezing ground in the laying zone and the possibility of its use in the creation of energy efficient heat transfer system.

References

1. Slepchenok V.S., Petrakov G.P. *Magazine of Civil Engineering*. 2011. No.4(22). Pp. 26–32. (rus)
2. Slepchenok V.S., Petrakov G.P. *Magazine of Civil Engineering*. 2009. No.7. Pp. 26–29. (rus)
3. Vatin N.I., Dubov V.V., Petrakov G.P. *Internet Journal "Construction of Unique Buildings and Structures"*. 2013. No.1(6). Pp. 48–54. (rus)
4. Korolev I.A., Petrakov G.P. *Magazine of Civil Engineering*. 2010. No.1. Pp. 23–25. (rus)
5. Bukhin V.E. *Thermal Engineering*. 2002. No.4. Pp. 24–29. (rus)
6. Yarovoi Yu.V., Korsunskiy V.Kh., Burdyga Yu. Yu. *Energy-safety and Energy-economy magazine*. 2010. No.1. Pp. 20–21. (rus)
7. Kuznetsov G.V., Polovnikov V.Yu. Numerical Investigation of Thermal Regimes in Twin-Tube-Channel Heat Pipelines Using Conductive-Convective Model of Heat Transfer. *Thermal Engineering*. 2012. Vol. 59. No.4. Pp. 310–315.
8. Vitalyev V.P. *Beskanalnye prokladki teplovykh setei* [Channelless laying of heating networks]. Moscow: Energoatomizdat, 1983. 280 p. (rus)
9. SP 41-103-2000. *Proektirovanie teplovoi izolyacii oborudovaniya i truboprovodov* [Design of thermal insulation of equipment and pipelines]. Moscow: Gosstroy Rossii, 2001. 42 p. (rus)
10. Nikolaev A.A. *Spravochnik proektirovshchika. Proektirovanie teplovykh setei* [Directory of the designer. Designing of thermal networks]. Kurgan: Integral, 2010. 357 p. (rus)
11. Slepchenok V.S., Rondel A.N., Shapovalov N.I. *Novosti teplosnabzheniya*. 2002. No.6. Pp. 18–23. (rus)
12. Beliakov V.A. *Novosti teplosnabzheniya*. 2007. No.6. Pp. 32–33. (rus)
13. Ivanov V.V., Vershinin L.B. *Vtoraya Rossiiskaya natsionalnaia konferentsiya po teploobmenu* [Second Russian National Conference on Heat Transfer] Moscow: Izdatelstvo MEI, 1998. Vol. 7. Pp. 103–105. (rus)

Polovnikov V.Yu., Huzeev V.A. Numerical analysis of the effect of freezing ground in the laying zone pads on heat loss of pipelines laid out without canals

14. Ivanov V. V., Shkrebko S. V. *Vtoraya Rossiiskaya natsionalnaya konferentsiya po teploobmenu* [Second Russian National Conference on Heat Transfer]. Moscow: Izdatelstvo MEI, 1998. Vol. 7. Pp. 106–108. (rus)
15. SNiP 23-01-99. *Stroitel'naya klimatologiya* [Building Climatology]. Moscow: Gosstroy Rossii, 2000. 57 p. (rus)
16. Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Transient heat and mass transfer at the ignition of vapor and gas mixture by a moving hot particle. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2010. Vol. 53. No.5–6. Pp. 923–930.
17. Kuznetsov G.V., Strizhak P.A. Distinctive features of the gas-phase ignition of a mixture of a kerosene vapor and air by a steel wire heated to high temperatures. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2009. Vol. 82. No.6. Pp. 1059–1065.
18. Glushkov D.O., Strizhak P.A. Heat and Mass Transfer at Ignition of Solid Condensed Substance with Relatively Low Calorific Power by a Local Energy Source. *Journal of Engineering Thermophysics*. 2012. Vol. 21. No.1. Pp. 69–77.
19. Garcia A.L. *Numerical methods for physics*. New York: Prentice Hall, 2000. 423 p.
20. Reddy J. N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. New York: Oxford University Press, 2004. 480 p.
21. Shaidurov V.V. *Mnogosetochnye metody konechnykh elementov* [Multigrid finite element methods]. Moscow: Nauka, 1989. 288 p. (rus)
22. Guva A.Ya. *Kratkiy teplofizicheskiy spravochnik* [The short guide thermophysical]. Novosibirsk: Sibvuzizdat, 2002. 300 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 19–24