

Предельная несущая способность ледяных балок

Аспирант Ли Лян*;

Д.ф.-м.н., профессор К. Н. Шхинек,

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: предельная несущая способность; ледяная балка; нагрузка; наклонные гидротехнические сооружения; LS-DYNA

Задача о предельной несущей способности ледяных балок встречается на пути решения многих практических проблем: при определении ледовых нагрузок на наклонные гидротехнические сооружения и сооружения шельфа, при определении несущей способности ледяного покрова для движения транспорта, при расчете посадки самолетов на лед, при определении сопротивления льда движению судов [1]. При взаимодействии с гидротехническими и шельфовыми сооружениями лед рассматривается как плавающая пластина, или балка. Если фронтальная поверхность сооружения наклонная, то лед при напозлании на нее изгибается. При этом в балке (пластине) возникают две зоны – сжатия и растяжения. Часто предполагается, что после достижения растягивающими напряжениями предела прочности (который у льда существенно меньше предела прочности при сжатии [2]) балка теряет свою несущую способность [3-4]. Предел прочности при растяжении введен как определяющий во все российские и международные нормы по расчету гидротехнических сооружений [2,5-6].

Установление предела прочности при растяжении в натуральных условиях и в ледовых бассейнах основывается на методе «клавиш» [7]. При использовании этого метода во льду с трех сторон вырезается балка, скрепленная с полем по четвертой (короткой) стороне – «клавиша». К свободному концу «клавиши» прикладывается вертикальная нагрузка. По силе, соответствующей образованию трещины в растянутой зоне в балке, устанавливается «предельный изгибающий момент» в месте контакта с полем. По этому моменту рассчитывают предельное растягивающее напряжение, при котором произошло разрушение – предел прочности при растяжении. Однако это не совсем точно. Даже в рассмотренном случае после образования трещины в растянутой зоне момент, образованный сжимающими напряжениями в сжатой зоне балки, продолжает сопротивляться изгибу. Это особенно существенно, если в балке, кроме изгиба, присутствует сжатие [8-11].

D.S. Sodhi [12] провел опыты с ледяной балкой, отделенной от ледяного поля только с двух сторон и нагруженной вертикальной силой в середине (рис. 1). Эта нагрузка постепенно увеличивалась. Регистрировались нагрузка, пересчитываемая на момент напряжения в заделке, и прогиб (деформация) в центре балки.

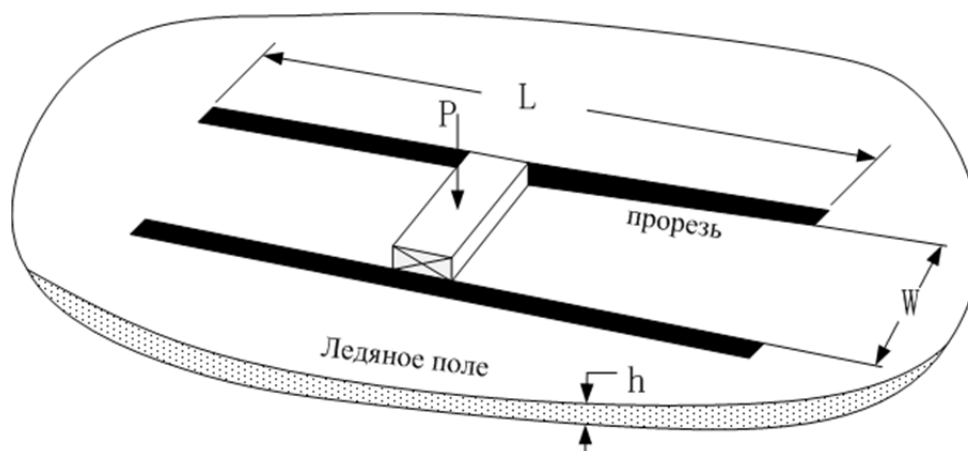


Рисунок 1. Схема опыта D.S. Sodhi [11]

Опыт показал, что в рассматриваемых условиях после разрушения в растянутой области возникают большие напряжения в сжатой зоне, приводящие к образованию пластического шарнира [13] и, как следствие, микротрещины (рис. 2). Концентрация напряжений в отмеченных на рис. 2 зонах приводит к образованию момента, сопротивляющегося изгибу, и повышению несущей способности балки.

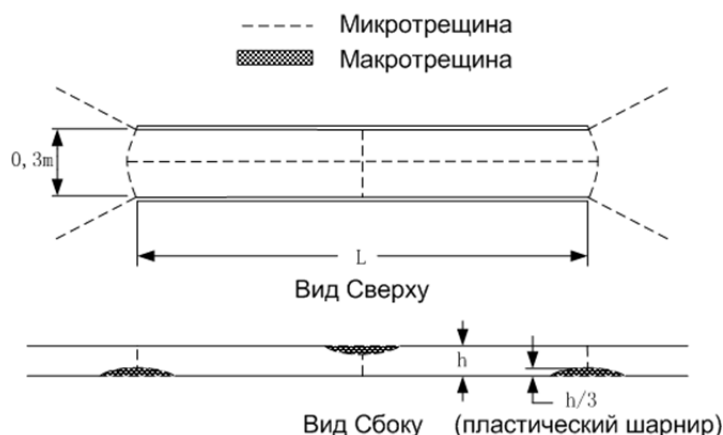


Рисунок 2. Зоны образования пластических шарниров

Рассмотренная постановка в определенной степени моделирует ситуацию, возникающую при движении ледоколов. Для гидротехнических сооружений более характерна другая ситуация: лед наползает на сооружение и изгибается. При этом возникает как изгибающий момент, так и продольная сила, вызванная реакцией сооружения на воздействие льда. Наличие этой силы повышает предельную несущую способность льда и, соответственно, нагрузки на сооружение [14-15]. Таким образом, можно предположить, что принятая в нормах нагрузка на сооружения дает ошибку, что может повлечь опасные последствия. Следует заметить, что наблюдения в натуральных условиях, проведенные Т. Карной [16], подтвердили, что после разрушения льда растяжением от изгиба нагрузка на сооружение продолжает нарастать.

Целью настоящей работы является более правильное определение предельной несущей способности льда для уточнения нагрузок на сооружение.

Постановка задачи

Рассматривается поле напряжений в плавающей в воде ледяной балке. Один конец балки находится в контакте с жесткой стенкой (моделирующей ледяное поле), к другому приложена вертикальная и горизонтальная силы (моделирующие нагрузки, возникающие на границе с сооружением). Требуется установить предельную несущую способность балки и нагрузки на сооружение. Лед рассматривается как упруго-идеально-пластическая среда (пластичность по Треска [17]) при сжатии и упруго-хрупкая при растяжении. Пределы упругости при растяжении и при сжатии определяются согласно [18]. При достижении предела прочности по растяжению в точке балки материал мгновенно разрушается: держащая сила в этой точке обращается в ноль.

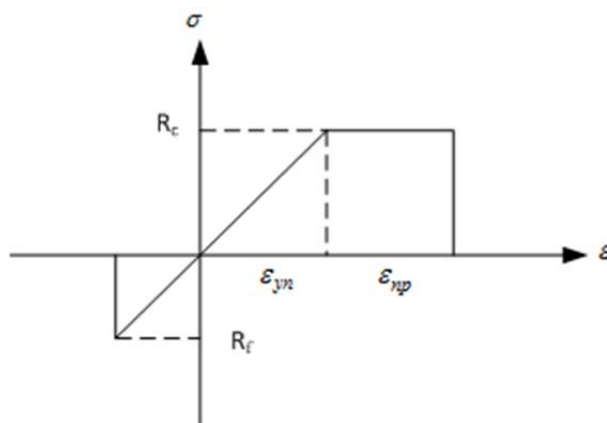


Рисунок 3. Принятая диаграмма «растяжение-сжатие»: $\varepsilon, \varepsilon_{уп}, \varepsilon_{упр}$ – деформация, упругая деформация и предельная пластическая деформация соответственно; σ – напряжение (сжимающие напряжения приняты положительными); R_f, R_c – пределы прочности при растяжении и сжатии соответственно

Принятая диаграмма «напряжение-деформация» представлена на рис. 3. При достижении предела по сжатию материал переходит в пластическое состояние, которое сохраняется до момента достижения предельной пластической деформации, принятой для льда – 0.35% [19].

Для оценки поля напряжений в плавающей в воде ледяной балке использован программный комплекс LS-DYNA. В настоящее время известно несколько подходов к описанию движения деформируемой сплошной среды. К ним относятся лагранжевый, эйлеровый и лагранжево-эйлеровый подходы. В программе LS-DYNA используются уравнения сохранения массы, количества движения и внутренней энергии, а также замыкающее эту систему определяющее соотношение [20].

Уравнение сохранения массы:

$$\dot{\rho} + \rho \operatorname{div}(v) = 0, \quad (1)$$

где ρ – плотность; v – скорость.

Уравнение сохранения количества движения:

$$\ddot{\rho} = \rho g + \operatorname{div}(\sigma), \quad (2)$$

где $\ddot{\rho}$ – ускорение; σ – тензор напряжений Коши; g – ускорение свободного падения.

Уравнение сохранения энергии:

$$\rho \dot{u} = \sigma : D + \rho r - \nabla q, \quad (3)$$

где \dot{u} – скорость изменение внутренней энергии; D – тензор деформации скорости; r – интенсивность объемного теплового источника; q – тепловой поток; ∇ – оператор Гамильтона; $\langle\langle \bullet \bullet \rangle\rangle$ – скалярное произведение; $\langle\langle \bullet \bullet \rangle\rangle$ – двойное скалярное произведение.

В основе пространственной дискретизации, используемой в LS-DYNA, лежит метод конечных элементов; в основе временной дискретизации – центральная дифференциальная схема интегрирования второго порядка точности.

Пространственная дискретизация уравнения сохранения количества движения предполагает переход от решения дифференциального уравнения (2) к решению уравнения

$$\int_V (\rho \ddot{x} - \rho g - \operatorname{div}(\sigma)) \cdot \Phi dv \quad (4)$$

с соответствующими граничными условиями. С использованием известных процедур метода конечных элементов решение уравнения (4) сводится к решению дифференциального уравнения

$$M \ddot{d} = F_i + F_e, \quad (5)$$

где \ddot{d} – вектор узловых ускорений; M – матрица масс; F_i, F_e – векторы внутренних и внешних сил.

Вектор внутренних сил, который входит в уравнение (5), определяется третьим членом подынтегрального выражения (4)

$$\int_V \operatorname{div}(\sigma) \cdot \Phi dv = \int_B \operatorname{div}(\sigma n) \cdot \Phi db - \int_V \sigma : (\nabla \Phi) dv \quad (6)$$

и он равен

$$F_i = \int_V \sigma : (\nabla \Phi) dv. \quad (7)$$

Вектор F_i получается в результате суммирования внутренних сил для всех элементов, входящих в рассматриваемую систему.

Вектор внешних сил F_e , который входит в дифференциальное уравнение (5), учитывает распределенные по поверхности тела нагрузки, объемные силы, такие как силы тяжести, контактные силы, реакции связей и др.

Метод решения и проверка его правильности

Лед, будучи поликристаллическим материалом, является пластичным и хрупким. Модель материала *MAT_PLASTICITY_COMPRESSION_TENSION (MAT_124) [21,22] входит в пакет LS-DYNA для моделирования свойства льда. В упругопластической модели зависимость, представленная на рис. 3, используется в качестве определяющей. При достижении предела упругости R_c материал переходит в пластическую стадию, а после достижения предельной пластической деформации в ячейке материал разрушается. Исходные данные для расчета приведены в таблице 1.

Верификация полученных данных проведена путем сопоставления результатов расчета с опытами D.S. Sodhi [12]. Рассмотрена ледяная балка, расположенная между жесткими плоскостями (окружающее поле). В центральном сечении балки приложена нагрузка, плавно возрастающая во времени. На рис. 4 приводятся результаты сопоставления расчета и эксперимента.

Таблица 1. Исходные данные для расчета

Модель	изотропный упругопластический материал
Плотность, кг/м ³	900
Модуль Юнга, Па	5,0E+9
Коэффициент Пуассона.	0,3
Пластическая деформация разрушения, %	0.35
Прочность на сжатие, МПа	2,5
Прочность на растяжение, МПа	0,9

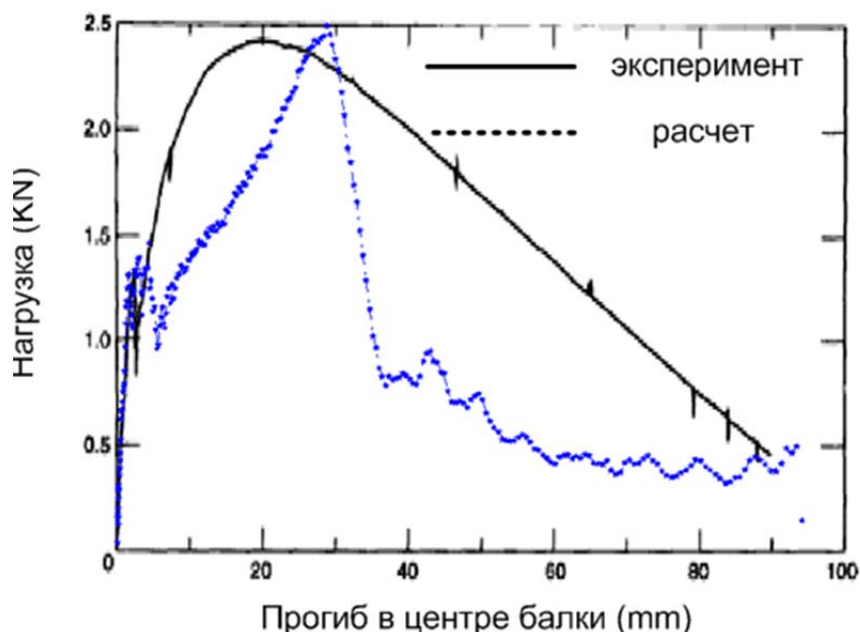


Рисунок 4. Сопоставление результатов расчетов и экспериментов

Из рис. 4 следует, что и эксперимент, и расчет имеют два максимума. Первый соответствует моменту, когда растягивающие напряжения достигают предела прочности при растяжении: происходит быстрое разрушение льда в растянутой зоне и спад нагрузки. В сжатой зоне продолжается деформирование материала – вначале упругое, а затем пластическое. Это происходит до тех пор, пока в точке среды не достигается предельная пластическая деформация, после чего несущая способность в этой точке пропадает. Значения максимумов нагрузки в эксперименте и расчете совпадают, однако спад по достижении предельной деформации в расчетах происходит быстрее, что объясняется недостаточной точностью описания поведения материала после разрушения. Мгновенный спад нагрузки (рис. 2) после достижения соответствующих пределов является грубым приближением. К сожалению, в литературе этот процесс почти не рассматривается, и мы не имеем достаточно обоснованных данных для его уточнения.

На рис. 5 приводятся расчетные напряжения в срединном поперечном сечении балки в разные моменты времени. Сжимающие напряжения приняты положительными.

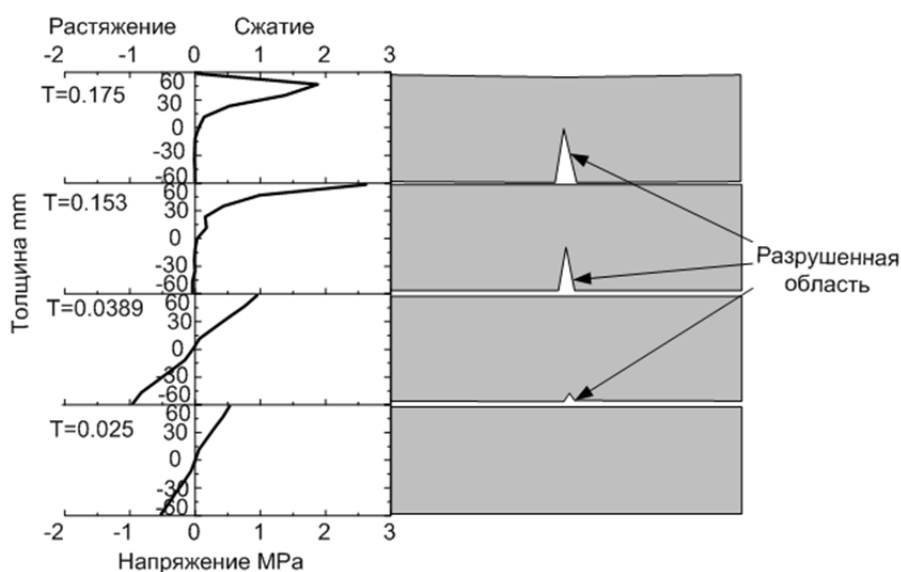


Рисунок 5. Напряжения в разные моменты времени в поперечном сечении балки, совпадающем с сечением приложения внешней нагрузки (моделирование опыта Sodhi [12])

На рис. 5 видно, что в начальный момент времени растягивающие и сжимающие напряжения распределены по поперечному сечению антисимметрично ($T = 0,025$ с и $T = 0,0389$ с). После момента $T=0,0389$ с в точке, соответствующей свободной поверхности балки, в растянутой зоне достигается предел прочности по растяжению. После этого разрушение распространяется по растянутой зоне, и в момент времени $T = 0,153$ с разрушение распространилось по всей растянутой зоне. В этот момент напряжения в сжатой зоне достигли предела прочности в точках свободной поверхности. В этой зоне начинается пластическое течение, а потом и разрушение. Далее пластическая деформация распространяется по сжатой зоне. Это сопровождается постепенным ростом напряжений в точках поперечного сечения, пластическим течением при достижении предела текучести и постепенной потере несущей способности.

Влияние свойств льда на несущую способность ледяной балки

Полученный выше результат свидетельствует о приемлемости принятой в численных расчетах модели, что позволяет использовать данную методику для практических расчетов. Однако в первую очередь следует оценить влияние свойств льда на конечный результат.

Основными параметрами льда, влияющими на несущую способность, являются: прочность на сжатие, прочность на растяжение и предельная пластическая деформация. Результаты расчетов для различных значений прочности при растяжении представлены на рис. 6. Все остальные расчетные параметры льда неизменны.

Из рис. 6 следует, что вариация прочности льда при изгибе (растяжении) в широких пределах влияет на значение первого пика нагрузки, но практически не оказывает влияния на предельную несущую способность.

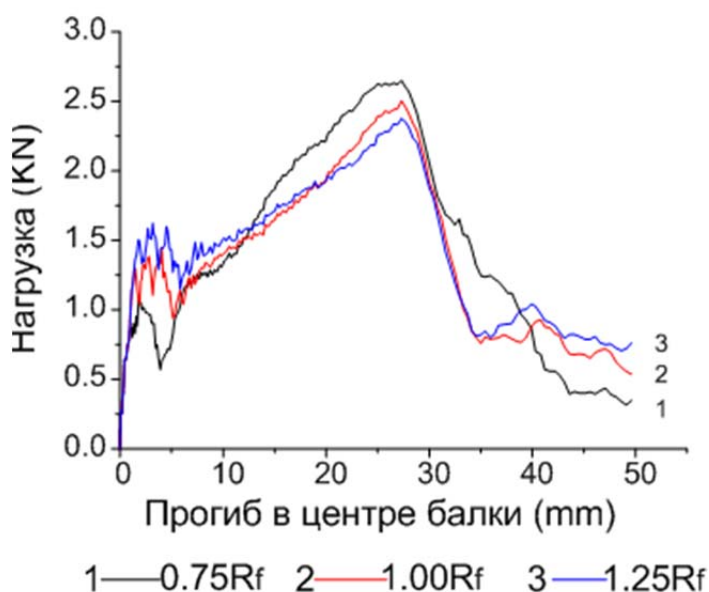


Рисунок 6. Определение процесса деформирования и нагрузок при различных прочностях льда на растяжение при прочих постоянных параметрах (R_f – прочность на растяжение из табл. 1)

На рис. 7 представлено изменение несущей способности при различных предельных пластических деформациях при прочих постоянных параметрах. Из рис. 7а следует, что предельная пластическая деформация в основном оказывает влияние на спад нагрузки и, вероятно, слабо влияет на максимальное значение несущей способности. Из рис. 7б следует, что после достижения прочности на сжатие градиент спада напряжения влияет на несущую способность. Таким образом, основной характеристикой льда в дальнейшем будет предел прочности при сжатии.

На рис. 8 приводятся результаты расчетов безразмерной предельной несущей способности в зависимости от отношения длины балки к ее толщине. На рис. 8 видно, что безразмерные результаты расчета согласуются с данными экспериментальных исследований Sodhi. Следует также отметить, что безразмерная нагрузка $P/R_c \cdot L \cdot h$ уменьшается с увеличением безразмерной длины L/h .

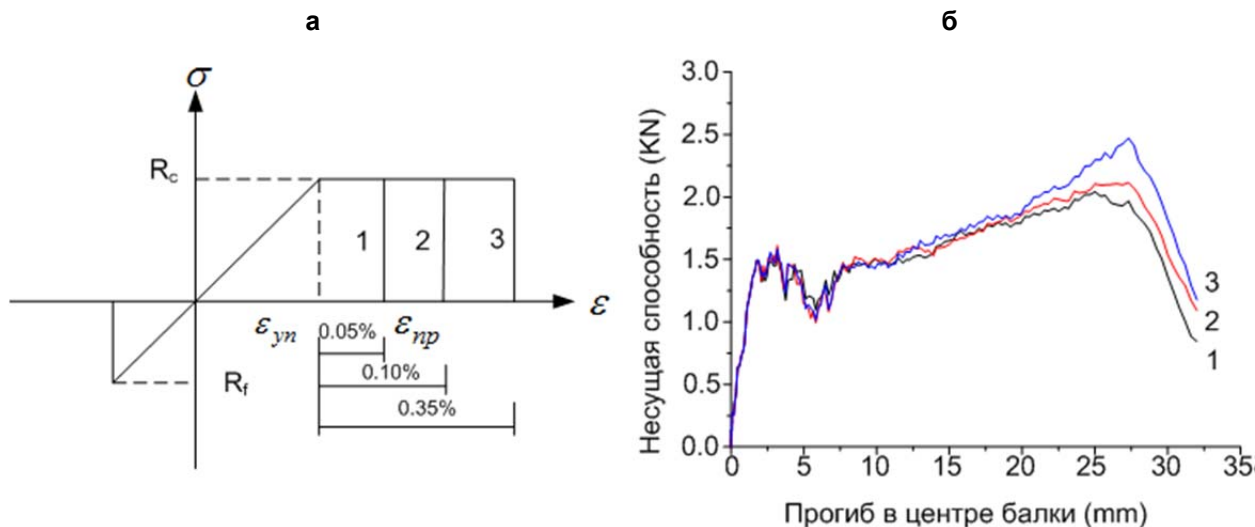


Рисунок 7. Определение процесса деформирования и нагрузок при различных предельных пластических деформациях при прочих постоянных параметрах. Пластическая деформация не меняется, законы разгрузки – разные:

- а) разные предельные пластические деформации при сохранении прочности на сжатие;
- б) 1 – предельная пластическая деформация при сохранении прочности на сжатие;
- 2,3 – разные предельные пластические деформации на спаде нагрузки;
- 1 – 0,35%, 2 – 0,50%, 3 – 0,80%

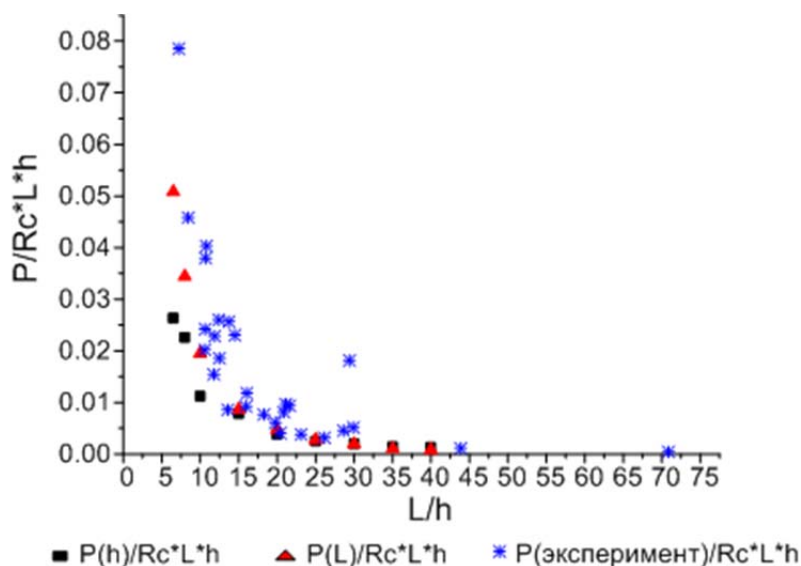


Рисунок 8. Зависимость безразмерной предельной несущей способности балки от отношения длины балки к ее толщине:

- $P(h)$ – нагрузка при постоянной длине балки L и переменной толщине h ;
- $P(L)$ – нагрузка при постоянной толщине h и переменной длине L ;
- $P(\text{эксперимент})$ – значение нагрузки, взятое из опыта Sodhi

Наклонные гидротехнические сооружения

Расчетная схема, используемая обычно при расчетах воздействия льда на наклонные гидротехнические сооружения, приведена на рис. 9. В этом случае ледяное поле должно преодолевать реакцию сооружения, силу трения, влияние массы блоков льда, которые образовались при разрушении и находятся на поверхности сооружения, силы, возникающей при их проталкивании, силы инерции и т.д. В расчетах лед обычно рассматривается как балка на гидравлическом основании, находящаяся под действием сил плавучести и толкающей силы окружающего льда с одной стороны и силы реакции сооружения на действие льда с другой стороны. Силы реакции раскладываются на вертикальную и горизонтальную составляющие. Для рассматриваемой балки вычисляются распределение изгибающего момента и напряжения вдоль балки с учетом продольной составляющей нагрузки. Предполагается, что в сечении, где растягивающее напряжение достигает предела, балка начинает разрушаться. Обычно в качестве предельного момента используется момент, возникающий при изломе свободно плавающей балки. Результаты, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что наличие продольных усилий значительно увеличивает предельный момент и, соответственно, несущую способность. Если в рассмотренном выше случае продольная сила возникала вследствие ограниченности возможности горизонтального расширения балки, то в схеме, представленной на рис. 9, она есть результат воздействия горизонтальной проекции реакции сооружения и блоков льда, находящихся на поверхности сооружения.

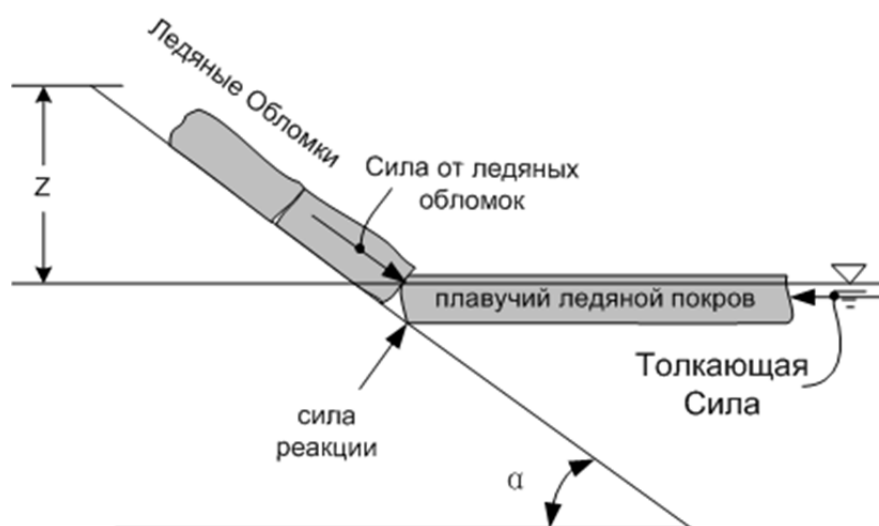


Рисунок 9. Стандартная схема расчета взаимодействия льда с сооружением с наклонной гранью

Для определения этого момента изучается предельная несущая способность консольной ледяной балки. К свободному концу этой балки приложены вертикальная и горизонтальная нагрузки. Определяются распределение напряжений в балке и тот изгибающий момент, при котором балка окончательно теряет несущую способность.

Решается следующая задача. К свободному концу плавающей балки длиной L и толщиной h приложена постоянная горизонтальная сила F и постепенно возрастающая во времени вертикальная сила $P(T)$. Определяется момент времени, когда балка окончательно разрушится, и предельный изгибающий момент, действующий в это время. Исходные данные по свойствам льда соответствуют указанным в табл. 1.

На рис. 10 видно, что в начальный момент времени сжимающие напряжения распределены равномерно в поперечном сечении ($T = 0,120$ с). С увеличением вертикальной нагрузки в момент $T = 2,150$ с в растянутой зоне достигается предел прочности на изгиб и образуется трещина. Далее трещина прорастает, и в момент $T = 2,165$ с в сжатой зоне достигается предел прочности на сжатие. Следует отметить, что область разрушения растяжением в этот момент занимает почти 75% площади балки.

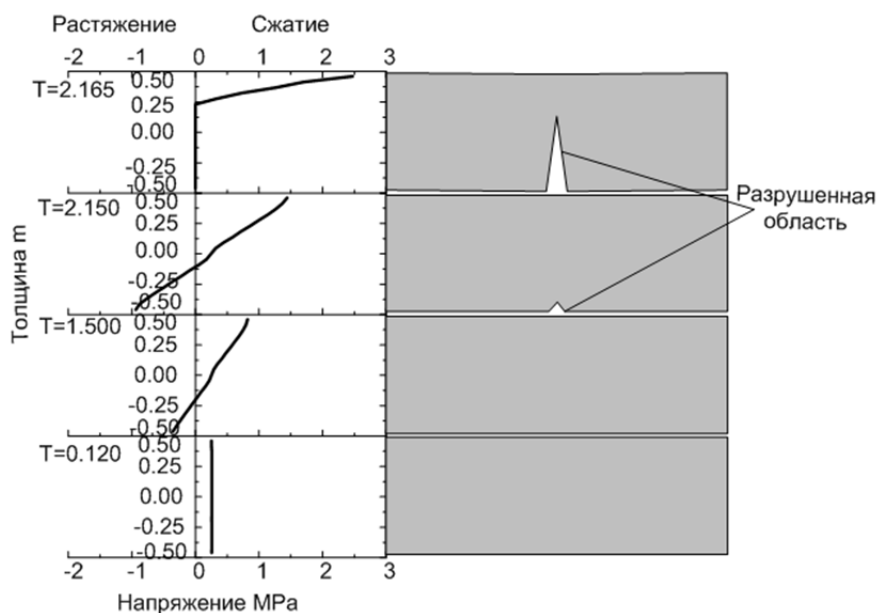


Рисунок 10. Распределение напряжений во льду около заделки в разные моменты времени ($h = 0,92$ м; $F = 0,25$ МПа)

На рис. 11 приводится зависимость безразмерного параметра M_p/M_y от отношения L/h . Каждая кривая соответствует действию той же вертикальной силы, для которой найдено M_y , и постоянной продольной силы $F_g = (0,1; 0,2; 0,3) R_c$. Видно, что L/h практически не влияет на значение безразмерного предельного момента, а значение продольной силы оказывает сильное влияние. Рис. 12 более подробно иллюстрирует влияние горизонтальной нагрузки на предельный момент. Вначале эта нагрузка приводит к увеличению несущей способности, но после достижения определенного предела несущая способность уменьшается, так как под действием значительной продольной силы разрушение начинается в сжатой зоне.

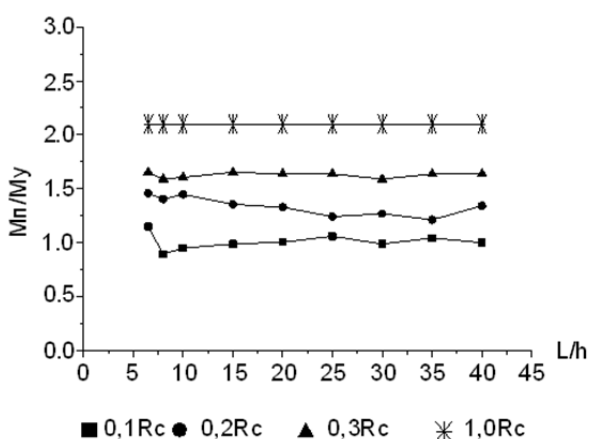


Рисунок 11. Зависимость безразмерных параметров M_p/M_y от отношения L/h

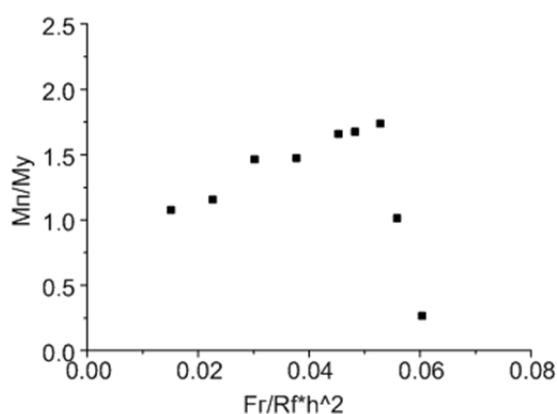


Рисунок 12. Зависимость безразмерных параметров M_p/M_y от отношения $F_r/R_f \cdot h^2$ для консоли

M_y – момент действующий на балку при упругой работе при достижении в крайнем волокне напряжения, равного прочности при растяжении;

M_p – предельный момент, вызываемый той же предельной силой при дополнительном действии продольной нагрузки; L и h – длина и толщина балки;

R_c и R_f – пределы прочности льда при сжатии и растяжении соответственно.

Принято $R_c/R_f = 2,7$

После разрушения ледяная балка оказывается разделенной на две части – блок льда и оставшаяся часть балки. Контакт между блоком и оставшейся частью ледяной балки рассматривается как пластический шарнир. Под действием оставшейся части ледяной балки блок продолжает скользить по поверхности сооружения. По мере движения блок может подвергнуться дальнейшему разрушению.

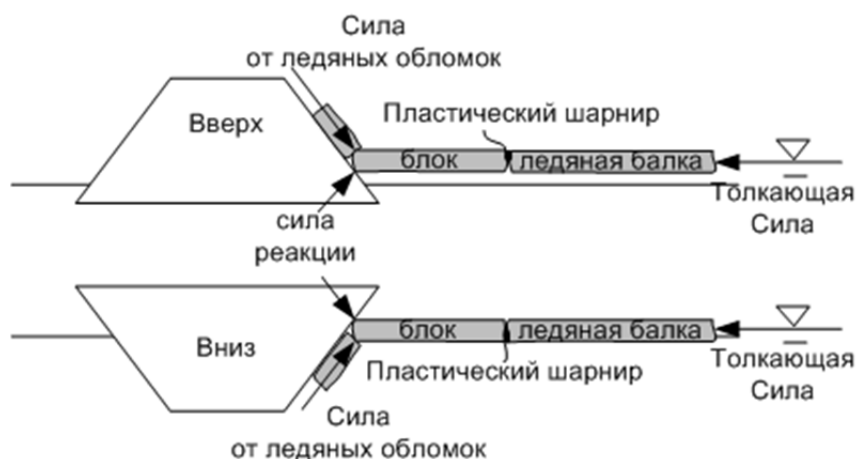


Рисунок 13. Расчетная схема для взаимодействия блоков льда и сооружений

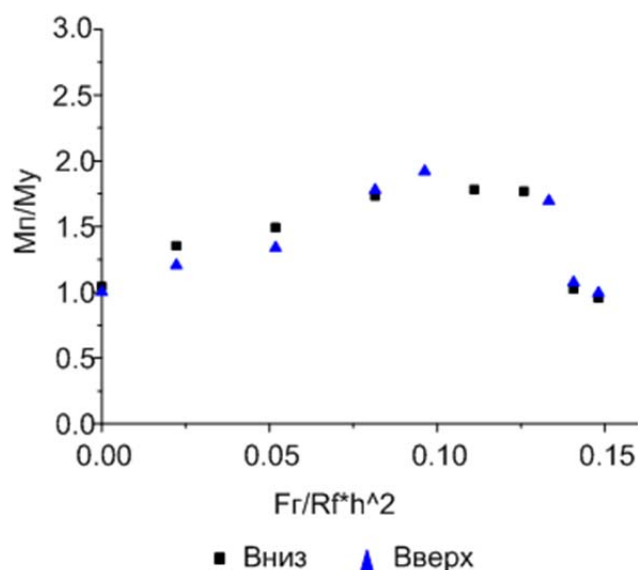


Рисунок 14. Зависимость безразмерных параметров Mn/Mu от отношения $Fr/Rf \cdot h^2$ для блока

Рис. 13 и рис. 14 иллюстрируют аналогичную ситуацию при взаимодействии льда с сооружениями с бортами, сужающимися вверх и вниз. Рис. 12 и рис. 14 показывают, что принятые методики недооценивают предельный несущий момент, следовательно, нагрузки на сооружения могут вырасти до двух раз.

Заклучение

Совпадение результатов расчетов по программному комплексу LS-DYNA и опытных данных указывает на эффективность и надежность метода математического моделирования. Обнаружено слабое влияние прочности при изгибе на предельную несущую способность и предельной пластической деформации на спад нагрузки.

Выявленные распределения напряжений в разные моменты времени в поперечном сечении балки отражают механизм разрушения льда и могут быть использованы для вычисления предельного момента сопротивления изгибу после образования трещины в растянутой зоне.

Полученные результаты показывают, что прочность на сжатие оказывает определяющее влияние на предельный изгибающий момент. Поэтому расчетные нагрузки на наклонные гидротехнические сооружения могут значительно вырасти.

Литература

1. Ashton G.D. River and Lake Ice Engineering. Littleton, Colorado: Water Resources Publication, 1986. 276 p.
2. ISO/FDIS 19906:2010(E). Petroleum and natural gas industries – Arctic offshore structures. Final draft.
3. Matskevitch D.G., Shkhinek K.N. Ice Action onto Multilegged Structures due to Change of Water Level // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 1992. №3. Pp. 222-227.
4. Афанасьев В.П. Определение прочности льда при расчете гидротехнических сооружений // Гидротехническое строительство. 1968. №5. С. 48-51.
5. СНиП 2.06.04-89* (1995) Нагрузки и воздействия на гидротехнические сооружения.
6. Шхинек К.Н. Ледовые нагрузки на арктические платформы // Гидротехническое строительство. 1994. №3. С. 33-36.
7. Бутягин И.П. Прочность льда и ледяного покрова. Новосибирск : Наука, 1966. 153 с.
8. Matskevitch D.G., Shkhinek K.N. Computer-based Simulation of the Ice Fracture Near a Vertical Pile // International Journal of Offshore and Polar Engineering. 1992. №2. Pp. 123-128.
9. Сухоруков К.К. Мелкомасштабная структура внутренних напряжений сплоченного ледяного покрова // Метеорология и гидрология. 1995. №8. С. 63-74.
10. Сухоруков К.К. Структура внутренних напряжений в дрейфующих ледяных полях Арктики и Антарктики // Известная РАН. Физика атмосферы и океана. 1996. Т. 32. №2. С. 257-265.
11. Сухоруков К.К. Особенности напряженного состояния морского льда при разрушении // Метеорология и гидрология. 1997. №3. С. 78-90.
12. Sodhi D.S. Vertical penetration of floating ice sheets. International Journal of Solid and Structures. 1998. Vol. 35. №32-32. Pp. 4275-4294.
13. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. т. 2. М. : Наука, 1965. 480 с.
14. Никитин В.А., Сухоруков К. К. Прочность морских ледяных полей и ледовые нагрузки // Метеорология и гидрология. 1998. №12. С. 88-95.
15. Никитин В.А., Ковалев С.М. Прочность морского ледяного покрова // Метеорология и гидрология. 2002. №12. С. 62-69.
16. Kärnä T., Jochmann P. Field observations on ice failure modes // Proceedings of 17th International Conference on POAC. Trondheim, Norway, June 16-19. 2003. Vol. 2. Pp. 839-849.
17. Лосет С., Шхинек К.Н., Гудместад О., Хойланд К. Воздействие льда на морские и береговые сооружения. СПб.: Лань, 2010. 272 с.
18. Лавров В.В. О строительных нормах прочности льда на сжатие // Гидротехническое строительство. 1967. №2. С. 39-42.
19. Kim H., Kedward, K.T. Modeling Hail Ice Impacts and Predicting Impact Damage Initiation in Composite Structures // AIAA Journal. 2000. Vol. 38. No.7. Pp. 1278-1288.
20. Муйземнек А.Ю., Богач А.А. Математическое моделирование процессов удара и взрыва в программе Ls-Dyna. Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005. 106 с.
21. Carney K.S., Benson D.J., Bois P.D., Lee R. A Phenomenological High Strain Rate Model with Failure for Ice // International Journal of Solids and Structures. 2006. Vol. 43. Pp. 7820-7839.
22. Hallquist J.O. Ls-Dyna Theoretical manual. Livermore: Livermore Software Technology Corporation, 2006. 680 p.

* Ли Лян, Санкт-Петербург, Россия

Тел. моб.: +7(921)949-96-83; эл. почта: hitliliang@gmail.com

© Ли Лян, Шхинек К.Н., 2013

doi: 10.5862/MCE.36.8

The ultimate bearing capacity of ice beams

Li Liang;**K.N. Shkhinek,***Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

+7(921)949-96-83; e-mail: hitliliang@gmail.com

Key words

ultimate bearing capacity; ice beam; load; sloping hydraulic structures; LS-DYNA

Abstract

It is usually proposed that bearing capacity of the ice beam during its interaction with a sloping hydraulic structure is exhausted when tensile stresses in the beam's cross-section reach some limit. But besides the tensile stress there is a compressive stress during the interaction with a sloping structure. This can change our estimations of the ultimate bearing capacity and load exerted on the structure.

The purpose of the study was to estimate influence of the longitudinal compressive stress on the ice beam's ultimate bearing capacity. The solution was obtained with the program complex LS-DYNA. Results of the mathematical modeling were compared with data of physical experiments conducted by Sodhi.

Good correlation of the results gave possibility to conduct wide numerical experiments and to suggest corrections to the existing methodology.

References

1. Ashton G.D. *River and Lake Ice Engineering*. Littleton, Colorado: Water Resources Publication, 1986. 276 p.
2. *ISO/FDIS 19906:2010(E). Petroleum and natural gas industries – Arctic offshore structures. Final draft*.
3. Matskevitch D. G., Shkhinek K. N. Ice Action onto Multi legged Structures due to Change of Water Level. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*. 1992. No. 3. Pp. 222-227.
4. Afanasyev V. P. *Gidrotekhnicheskoye stroitelstvo*. 1968. No. 5. Pp. 48-51. (rus)
5. *SNiP 2.06.04-89* (1995) Nagruzki i vozdeystviya na gidrotekhnicheskiye sooruzheniya* [Russian construction standard. Loads and impacts on hydro-technical constructions]. (rus)
6. Shkhinek K. N. *Gidrotekhnicheskoye stroitelstvo*. 1994. No. 3. Pp. 33-36. (rus)
7. Butyagin I. P. *Prochnost lda i ledyanogo pokrova* [The strength of the ice and the ice cover]. Novosibirsk: Nauka, 1966. 153 p. (rus)
8. Matskevitch D. G., Shkhinek K.N., Computer-based Simulation of the Ice Fracture Near a Vertical Pile. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*. 1992. No. 2. Pp. 123-128.
9. Sukhorukov K. K. *Meteorologiya i gidrologiya*. 1995. No. 8. Pp. 63-74. (rus)
10. Sukhorukov K. K. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana*. 1996. Vol. 32. No. 2. Pp. 257-265. (rus)
11. Sukhorukov K. K. *Meteorologiya i gidrologiya*. 1997. No. 3. Pp. 78-90. (rus)
12. Sodhi D.S. Vertical penetration of floating ice sheets. *International Journal of Solid and Structures*. 1998. Vol. 35. No. 32-32. Pp. 4275-4294.
13. Timoshenko S.P. *Soprotivleniye materialov* [Strength Of Materials]. Vol. 2. Moscow: Nauka, 1965. 480 p. (rus)
14. Nikitin V. A., Sukhorukov K. K. *Meteorologiya i gidrologiya*. 1998. No. 12. Pp. 88-95. (rus)
15. Nikitin V. A., Kovalev S. M. *Meteorologiya i gidrologiya*. 2002. No. 12. Pp. 62-69. (rus)
16. Kärnä T, Jochmann P. Field observations on ice failure modes. *Proceedings of 17th International Conference on POAC*. Trondheim, Norway, June 16-19. 2003. Vol. 2. Pp. 839-849.
17. Loset S., Shkhinek K.N., Gudmestad O.T., Hoyland K.V. *Vozdeystviye lda na morskoye i beregovyye sooruzheniya* [Actions from Ice on Arctic Offshore and Coastal Structures]. Saint-Petersburg: Lan, 2010. 272 p. (rus)
18. Lavrov V. V. *Gidrotekhnicheskoye stroitelstvo*. 1967. No. 2. Pp. 39-42. (rus)

19. Kim H., Kedward, K. T. Modeling Hail Ice Impacts and Predicting Impact Damage Initiation in Composite Structures. *AIAA Journal*. 2000. Vol. 38. No. 7. Pp. 1278-1288.
20. Muyzemnek, A. Yu., Bogach A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye protsessov udara i vzryva v programme Ls-Dyna* [Mathematical modeling of processes of impact and explosion in the programme of the Ls-Dyna]. Penza: IITs PGU, 2005. 106 p. (rus)
21. Carney K.S., Benson D.J., Bois P.D., Lee R. A Phenomenological High Strain Rate Model with Failure for Ice. *International Journal of Solids and Structures*. 2006. Vol. 43. Pp. 7820-7839.
22. Hallquist J. O. *Ls-Dyna Theoretical manual*. Livermore: Livermore Software Technology Corporation. 2006. 680 p.

Full text of this article in Russian: pp. 65-74