

## О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа

*Д.т.н., профессор А.А. Лукашевич\*;*

*д.ф.-м.н., профессор Л.А. Розин,*

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

**Ключевые слова:** контактная задача; односторонние связи; трение; пошаговый анализ; рабочая схема; дискретная модель; контактный элемент

Конструктивно нелинейные задачи с односторонними связями и трением при неизвестной заранее зоне контакта часто встречаются при расчете различного рода конструкций и сооружений. Например, технологические и деформационные швы, имеющие место в массивных сооружениях, могут раскрываться и закрываться как с проскальзыванием, так и со сцеплением контактирующих поверхностей при различных сочетаниях внешних нагрузок. То же самое может происходить на контакте подошвы сооружения с основанием, либо на отдельных опорах, допускающих отрыв или проскальзывание опирающейся на них конструкции. Вместе с тем именно состояние контактной зоны нередко является определяющим при оценке напряженно-деформированного состояния, прочности и работоспособности конструкций и сооружений.

В настоящее время численное решение контактных задач осуществляется, как правило, на основе различных схем метода конечных элементов (МКЭ). При этом континуальные задачи контакта упругих тел сводятся к конечномерным задачам с дискретными (односторонними) связями. Разработке различных численных методов расчета систем с односторонними связями на базе МКЭ посвящено множество исследований, среди которых отметим работы А. В. Вовкушевского с соавторами [1, 2], П. Вригерса [3, 4], Н. Кикучи, Д. Одена [5], Т. А. Ларсена [6, 7] и многих других.

Для моделирования односторонних связей также могут применяться специальные контактные конечные элементы (ККЭ). ККЭ вводятся на участках возможного контакта взаимодействующих тел, тем самым дискретизируя некоторый тонкий слой (фиктивный или реальный) между контактирующими поверхностями. Этот контактный слой объединяет взаимодействующие тела в единую систему, и благодаря приданным ему особым свойствам, которые учитываются посредством численного анализа, он может удовлетворять необходимым условиям контакта. Такой подход позволяет свести конструктивную нелинейность, то есть задачи с односторонними связями и трением, к рассмотрению нелинейного дискретного контактного слоя. Различные схемы контактных конечных элементов использовались в работах М. В. Зернина [8], А. Н. Подгорного [9] и других авторов.

Для численного решения контактных задач с односторонними связями применяются как методы нелинейного программирования, сводящиеся в конечном счете к методам итераций (по предельным силам трения [10, 11], по зазорам [1]), так и инкрементальные (пошаговые) методы [12, 13]. Положительной стороной пошагового процесса является то, что на его основе может быть получено решение контактной задачи на любой ступени нагружения. Кроме того, такой подход может быть достаточно эффективен для задач с усложненными условиями контакта и нагружения, учет которых приближает расчетную схему к реальной работе сооружения. Это, например, контактное трение при зависящих от решения нормальных силах взаимодействия; учет деформаций и начальной прочности односторонних связей; учет последовательности возведения и загрузки конструкции и динамического действия нагрузки. Поскольку перечисленные выше факторы делают решение подобных задач зависящими от характера и истории нагружения, представляется целесообразным моделировать контактное взаимодействие и, соответственно, строить решение на основе метода пошагового анализа.

В настоящей работе при решении односторонних контактных задач используются непосредственно конечно-элементные модели и алгоритмы их численной реализации. Так, для моделирования контакта предлагается использовать контактные конечные элементы в виде стержневой системы – плоской или пространственной рамы [14]. Данные ККЭ взаимодействуют с обычными конечными элементами двумерных либо трехмерных задач и обеспечивают контакт между узлами сетки, расположенными на граничных поверхностях контактирующих тел (рис. 1).

Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа

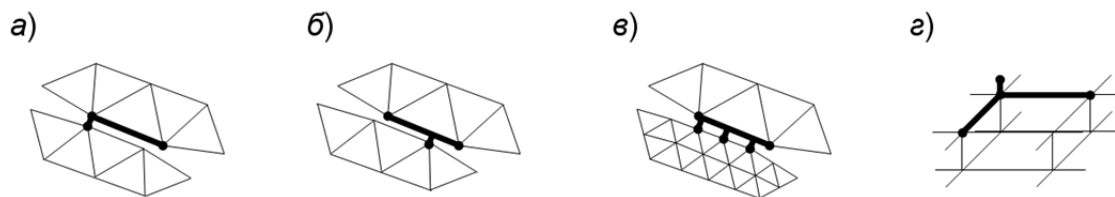


Рисунок 1. Семейство контактных конечных элементов рамного типа

При использовании указанных контактных элементов нет необходимости в совпадении координат узлов контактирующих поверхностей, т. е. могут применяться несогласованные сетки. ККЭ могут вводиться как сразу, так и последовательно, по мере установления контактов между граничными поверхностями тел, выполняя тем самым функции регистрации состояния участков контакта (или отрыва) соприкасающихся поверхностей, а также моделируя различные условия контакта (отрыва, сцепления, проскальзывания и т. д.). Кроме того, посредством ККЭ могут учитываться различные свойства односторонних связей, такие как упругая податливость, физическая нелинейность, начальная прочность и др. Моделирование условий контакта осуществляется посредством изменения физических свойств контактного слоя, которые выражаются через жесткостные характеристики отдельных стержней рамных ККЭ.

Рассмотрим, в частности, плоскую контактную задачу для линейно упругих тел  $V^+$  и  $V^-$ , между граничными поверхностями которых ( $S_c^+$ ,  $S_c^-$ ) имеют место односторонние связи с кулоновским трением. Для моделирования состояния контакта в дискретной расчетной модели МКЭ используем предложенные плоские рамно-стержневые контактные элементы (рис. 2).

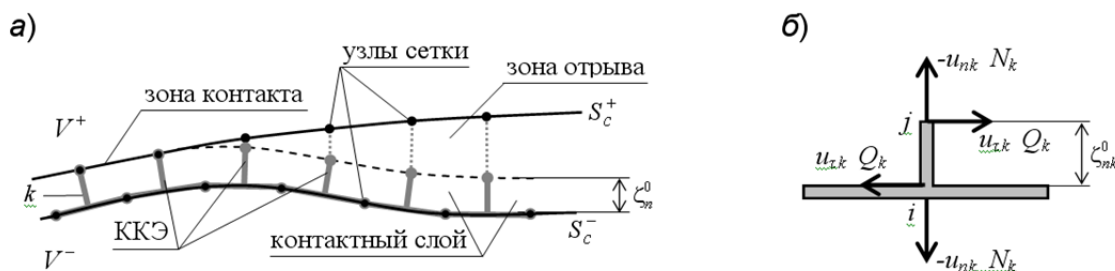


Рисунок 2. Схема контактного взаимодействия при помощи рамных ККЭ

Граничные условия на контакте при этом выражаются через усилия и деформации в каждом отдельном ККЭ:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} \leq 0, \quad N_k \leq 0, \quad u_{nk} N_k = 0 \\ |Q_k| \leq |Q_{pk}| = -f_k N_k, \quad Q_k u_{\tau k} \geq 0, \quad (Q_k - Q_{pk}) u_{\tau k} = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (1)$$

Здесь  $N_k$ ,  $Q_k$  – продольная и поперечная силы в  $k$ -м ККЭ;  $u_{nk}$ ,  $u_{\tau k}$  – взаимное смещение противоположащих узлов на  $S_c^+$  и  $S_c^-$  ( $S_c = S_c^+ \cup S_c^-$ ) соответственно по нормали и по касательной;  $f$  – коэффициент трения.

Численная реализация контактных условий (1) осуществляется посредством пошагового анализа процесса нагружения и изменения состояния контакта в рассматриваемой рамно-стержневой модели. Момент перехода от одного состояния к другому представляет собой события выключения или включения односторонней связи, проскальзывания или зацепления. Метод пошагового анализа является наиболее эффективным для рассматриваемого класса контактных задач. Кроме того, появляется возможность управления дискретным контактным слоем в зависимости от поведения рассматриваемой системы, текущего состояния контактной зоны, уровня напряженно-деформированного состояния, этапа возведения и загрузки сооружения и т. д.

Статическое нагружение моделируется посредством пошагового приложения заданной нагрузки. Будем предполагать, что между двумя последовательными событиями система деформируется по линейному закону – в этом случае в пределах каждого шага строится решение линейно упругой задачи, а события на контакте определяются согласно схеме простого нагружения. В результате решение конструктивно нелинейной контактной задачи будет представляться в виде решения последовательности некоторого числа линейных задач при последовательном же изменении рабочих схем сооружения. Порядок расчета в данном случае состоит из пробных и основных шагов нагружения. Из анализа пробного шага определяется момент наступления очередного события. В результате основного шага устанавливается новое состояние контакта и, в свою очередь, назначается следующий пробный шаг, исходя из анализа изменения рабочей схемы. Это позволяет уточнять величину не только текущего шага нагружения, но и прогнозировать дальнейшие шаги и, таким образом, строить оптимальный, с точки зрения продолжительности и трудоемкости, процесс нагружения [15].

Момент наступления события проскальзывания (т. е. величина основного (s+1)-го шага) для k-й связи, находящейся до этого в состоянии контакта со сцеплением ( $k \in S_{1c}$ ,  $S_{1c} = S_{1c}^+ \cup S_{1c}^-$ ), определяется следующим выражением:

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left( \frac{Q_{pk}^s - Q_k^s}{\Delta\tilde{Q}_k^{s+1} - \Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}} \right), \quad k \in S_{1c}. \quad (2)$$

Переход из состояния скольжения в состояние сцепления на (s+1)-м шаге определяется условием:  $(\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1} / \Delta u_{\tau k}^s) < 0$ ,  $\Delta u_{\tau k}^s \neq 0$ ,  $k \in S_{2c}$ .

Моменты выключения (отрыва) или включения (контакта) для k-й связи, находящейся до этого в состоянии контакта ( $k \in S_{2c}$ ,  $S_{2c} = S_{2c}^+ \cup S_{2c}^-$ ) или в состоянии отрыва ( $k \in S_{3c}$ ,  $S_{3c} = S_{3c}^+ \cup S_{3c}^-$ ):

$$\Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left( \frac{-N_k^s}{\Delta\tilde{N}_k^{s+1}} \right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}; \quad \Delta\lambda_k^{s+1} = \Delta\tilde{\lambda}^{s+1} \left( \frac{-u_{nk}^s}{\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}} \right), \quad k \in S_{3c}. \quad (3)$$

Здесь величины  $\Delta\tilde{Q}_k^{s+1}$ ,  $\Delta\tilde{Q}_{pk}^{s+1}$ ,  $\Delta\tilde{N}_k^{s+1}$ ,  $\Delta\tilde{u}_{\tau k}^{s+1}$ ,  $\Delta\tilde{u}_{nk}^{s+1}$  – приращения контактных усилий и взаимных перемещений для k-го ККЭ на пробном шаге  $\Delta\tilde{\lambda}^{s+1}$ .

Возможные случаи изменения предельной силы трения  $Q_{pk}$  на (s+1)-м шаге, а также соответствующие схемы уточнения текущего основного шага и корректировки контактных усилий (для k-го ККЭ) приводятся ниже.

1. Приращение предельной поперечной силы превышает приращение поперечной силы в k-м ККЭ, что соответствует условию допредельного трения – устанавливается состояние сцепления и выполняется перерасчет шага.

2. Приращение предельной поперечной силы меньше, чем приращение поперечной силы – состояние скольжения на k-м контакте сохраняется и производится корректировка значений поперечных сил в ККЭ:

$$Q_k^{s+1} = Q_k^s + \Delta Q_{ck}^{s+1}, \quad \Delta Q_{ck}^{s+1} = \Delta Q_{pk}^{s+1} + \delta Q_k^s, \quad k \in S_{2c}, \quad (4)$$

где  $\delta Q_k^s = Q_{pk}^s - Q_k^s$  – невязка поперечных сил;  $\Delta Q_{pk}^{s+1}$  – приращение предельной поперечной силы на шаге  $\Delta\lambda_p^{s+1}$  (при заданной точности вычислений  $\varepsilon_p$ ):

$$\Delta \lambda_p^{s+1} = \min(\Delta \lambda_k^{s+1}), \quad \Delta \lambda_k^{s+1} = \Delta \tilde{\lambda}^{s+1} \left| \frac{\varepsilon_p Q_{pk}^s}{\Delta \tilde{Q}_{pk}^{s+1}} \right|, \quad k \in S_{2c}, \quad \text{где} \quad \left| \frac{\Delta Q_{pk}^{s+1}}{Q_{pk}^s} \right| \leq \varepsilon_p. \quad (5)$$

К соответствующим контактным узлам на граничных поверхностях взаимодействующих тел прикладываются компенсирующие силы:

$$F_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{ck}^{s+1} = -\Delta Q_{pk}^{s+1} - \delta Q_k^s, \quad k \in S_{2c}. \quad (6)$$

3. Если предельная поперечная сила на шаге уменьшается:  $\left| \tilde{Q}_{pk}^{s+1} \right| - \left| Q_{pk}^s \right| < 0$ , то уточнение шага и корректировка контактных усилий производится согласно (4)–(6).

При динамическом действии нагрузки конструктивная нелинейность проявляется в смене рабочих схем сооружения во времени. Момент времени изменения состояния контакта (т. е. наступление очередного события) в этом случае определяется путем пошагового (по времени) анализа рамно-стержневой контактной модели при использовании соответствующих аппроксимирующих выражений для перемещений, скоростей и ускорений на шаге  $\Delta t$ . При этом корректируется продолжительность временного шага и производится его перерасчет. В результате устанавливается новое состояние контакта на данный момент времени и, таким образом, меняется текущая рабочая схема сооружения.

Запишем конечно-элементную формулировку для динамической контактной задачи. Матричное уравнение движения здесь представляется в виде, позволяющем свести решение конструктивно нелинейной динамической задачи к решению последовательности линейных динамических задач на основе пошагового по времени анализа состояния контакта для рассматриваемой дискретной модели МКЭ:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} + \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{K} \mathbf{U}^t. \quad (7)$$

Для численного интегрирования уравнений (7) используется конечно-разностная схема Ньюмарка [16]. В любой момент времени в пределах текущего шага  $\Delta t$  значения перемещений, скоростей и ускорений рассчитываются по формулам:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{U}}(t') &= \ddot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)}{\Delta t} [\ddot{\mathbf{U}}^{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{U}}^t]; & \dot{\mathbf{U}}(t') &= \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)}{2} [\ddot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^{t'}]; \\ \mathbf{U}(t') &= \mathbf{U}^t + (t'-t) \dot{\mathbf{U}}^t + \frac{(t'-t)^2}{4} [\ddot{\mathbf{U}}^t + \ddot{\mathbf{U}}^{t'}]. \end{aligned} \quad (8)$$

Кроме того, при наличии односторонних связей и кулоновского трения должны выполняться граничные условия на контакте, записанные для момента времени  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} u_{nk}^t \leq 0, \quad N_k^t \leq 0, \quad u_{nk}^t N_k^t = 0 \\ \left| Q_k^t \right| \leq \left| Q_{pk}^t \right|, \quad Q_k^t \dot{u}_{\tau k}^t \geq 0, \quad (Q_k^t - Q_{pk}^t) \dot{u}_{\tau k}^t = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (9)$$

Здесь  $\dot{u}_{\tau k}^t$  – скорость взаимного касательного перемещения противоположащих узлов  $k$ -го ККЭ в момент времени  $t$ . Состояния на контакте будут определяться следующими условиями: при сцеплении  $u_{nk}^t = 0$ ,  $N_k < 0$ ,  $\dot{u}_{\tau k}^t = 0$ ,  $\left| Q_k^t \right| < \left| Q_{pk}^t \right|$ ; при проскальзывании  $u_{nk}^t = 0$ ,  $N_k^t < 0$ ,  $\dot{u}_{\tau k}^t \neq 0$ ,  $\left| Q_k^t \right| = \left| Q_{pk}^t \right|$ ; при отрыве  $u_{nk}^t < 0$ ,  $N_k^t = 0$ .

Численное решение динамической контактной задачи, таким образом, будет заключаться в проведении процесса пошагового интегрирования по времени уравнений (7) при выполнении условий на контакте в виде (9). Соответствующие выражения для определения момента времени  $\hat{t}_k$  наступления ближайшего события – проскальзывания, зацепления, отрыва или контакта для  $k$ -й связи – здесь имеют следующий вид [17]:

$$\begin{aligned} \hat{t}_k &= t + \Delta t \left( \frac{Q_{pk}^t - Q_k^t}{(Q_k^{t+\Delta t} - Q_k^t) - (Q_{pk}^{t+\Delta t} - Q_{pk}^t)} \right), \quad k \in S_{1c}; & \hat{t}_k &= t + \Delta t \left( \frac{-\dot{u}_{\tau k}^t}{\dot{u}_{\tau k}^{t+\Delta t} - \dot{u}_{\tau k}^t} \right), \quad k \in S_{2c}; \\ \hat{t}_k &= t + \Delta t \left( \frac{-N_k^t}{N_k^{t+\Delta t} - N_k^t} \right), \quad k \in S_{1c}, S_{2c}; & \hat{t}_k &= t + \Delta t \left( \frac{-u_{nk}^t}{u_{nk}^{t+\Delta t} - u_{nk}^t} \right), \quad k \in S_{3c}. \end{aligned} \quad (10)$$

С помощью аппроксимирующих выражений (8) дополнительно может быть произведено итерационное уточнение момента времени  $\hat{t}_k$ , затраты времени счета при этом возрастают незначительно.

Приведенные модели ККЭ и методы их расчета нетрудно распространить на решение задач с односторонними связями при учете физических свойств контактного слоя, а также других дополнительных факторов. Так, при учете упругой податливости в односторонних связях [18] граничные условия (1) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} + u_{nk}^c \leq 0; \quad N_k \leq 0; \quad (u_{nk} + u_{nk}^c)N_k = 0 \\ |Q_k| \leq |Q_{pk}| = -f_k N_k; \quad Q_k(u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) \geq 0; \quad (Q_k - Q_{pk})(u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) = 0 \\ u_{nk}^c = N_k / C_{nk}; \quad u_{\tau k}^c = -Q_k / C_{\tau k} \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (11)$$

Здесь  $u_{nk}^c, u_{\tau k}^c$  – продольная и поперечная деформации  $k$ -го ККЭ (соответствующие обжатию и сдвигу упруго-податливого контактного слоя с начальной толщиной  $\zeta_n^0$ );  $C_{nk} = A_k / \rho_{nk}$ ,  $C_{\tau k} = A_k / \rho_{\tau k}$ ,  $\rho_n = (1 - \mu_c^2) \zeta_n^0 / E_c$ ,  $\rho_{\tau} = 2(1 + \mu_c) \zeta_n^0 / E_c$  – характеристики жесткости и податливости ККЭ соответственно в нормальном и касательном направлениях;  $A_k$  – площадь контакта, относящаяся к ККЭ. Физическая нелинейность контактного слоя здесь также может быть сведена к внутренней нелинейности самих рамных контактных элементов – при этом нелинейные свойства слоя будут задаваться через нелинейные характеристики отдельных стержней ККЭ.

При учете начальной прочности контактного шва на разрыв и срез условия на контакте запишутся в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} u_{nk} + u_{nk}^c \leq 0, \quad N_k + \frac{|Q_k|}{\alpha_R} \leq N_{Rk}, \quad (u_{nk} + u_{nk}^c)(N_k + \frac{|Q_k|}{\alpha_R} - N_{Rk}) = 0 \\ |Q_k| \leq Q_{Rk} - \alpha_R N_k, \quad Q_k(u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) \geq 0, \quad (Q_k - Q_{Rk} + \alpha_R N_k)(u_{\tau k} + u_{\tau k}^c) = 0 \end{aligned} \right\} k \in S_c. \quad (12)$$

Здесь  $N_{Rk}, Q_{Rk}$  – предельные контактные усилия растяжения и сдвига для  $k$ -й дискретной односторонней связи (т. е.  $k$ -го ККЭ).

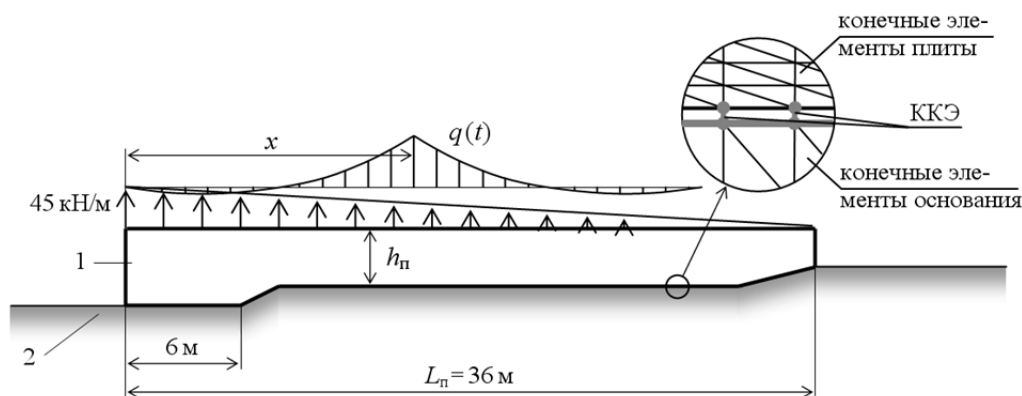
Подчеркнем, что условия (12) справедливы только до момента разрушения связей в данной точке контакта, после чего будут действительны условия (11), описывающие односторонние связи с трением. Внося соответствующие дополнения в алгоритм, обеспечиваем в одном пошаговом процессе одновременный учет прочности контактного шва, а также раскрытия или трения его поверхностей на участках, где сцепление разрушено.

Приведенные расчетные модели и методы реализованы в комплексе вычислительных программ, предназначенных для решения статических и динамических задач контактного взаимодействия. С их помощью выполнены расчеты ряда конструкций и сооружений с односторонними связями при учете соответствующих условий контакта и характера внешних воздействий [19, 20].

Ниже рассмотрена задача о взаимодействии водобойной плиты плотины с грунтовым основанием при гидродинамическом воздействии потока воды, сбрасываемой с верхнего бьефа плотины. Расчетная схема плиты (рис. 3) соответствуют одному из объектов Волжского гидроузла.

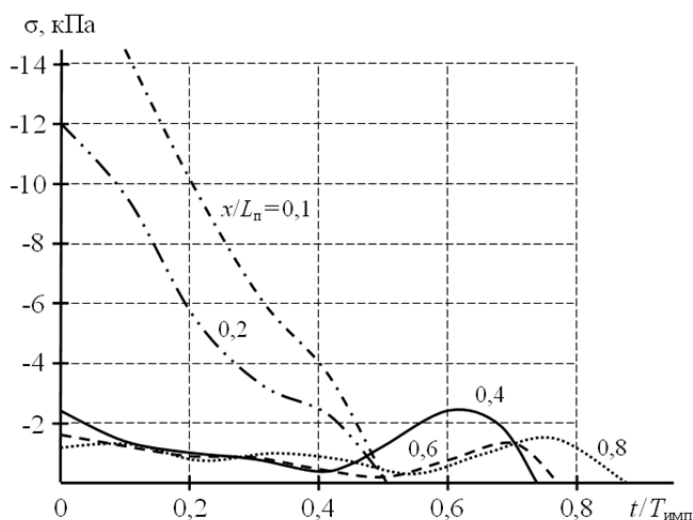
Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа

Целью расчетов являлась оценка влияния пульсационной составляющей давления воды в сбрасываемом потоке на контактное взаимодействие водобойной плиты с основанием.

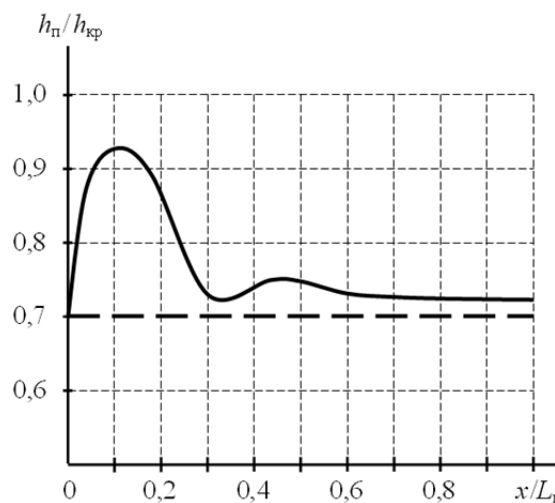


**Рисунок 3. Схема рассчитываемой плиты и приложенных нагрузок**

При расчете учитывались нагрузки, обусловленные собственным весом плиты, гидродинамическим воздействием со стороны потока воды, фильтрационным противодействием. Пульсационная составляющая давления воды в сбрасываемом потоке учитывалась в виде динамической импульсной нагрузки. Чтобы изучить зависимость решения от характеристик гидродинамического воздействия, было просчитано поведение плиты при различном положении импульса на водобойной плите ( $x/L_p$ ), а также при разных его направлениях и продолжительности (рис. 4). Получены зависимости предельных значений толщины плиты от положения импульса (рис. 5). Сплошной линией показана огибающая относительных значений толщины плиты, отвечающих условию недопущения отрыва и сдвига плиты относительно основания (здесь  $h_{кр} = 3,48$  м – критическая глубина, соответствующая расчетному удельному расходу воды). Пунктирная линия соответствует предельной толщине плиты при приложении только статических нагрузок. На основе анализа полученных результатов сделаны предложения, касающиеся конструктивных решений рассмотренного сооружения с учетом характера действующих на плиту нагрузок [20].



**Рисунок 4. Контактные напряжения на левом краю подошвы водобойной плиты перед моментом отрыва**



**Рисунок 5. Зависимость предельной толщины плиты  $h_p$  от положения импульса  $x/L_p$**

Таким образом, предложенная модель контакта и численный метод ее расчета обеспечивают возможность анализа контактного взаимодействия упругих систем и имеют преимущества в тех случаях, когда решение задачи зависит от характера и истории загрузки сооружения. Результаты проведенных расчетов позволяют сделать заключение об эффективности и надежности разработанного подхода при учете сложных условий контакта и нагружения, что имеет существенное значение для решения прикладных задач строительной механики.

Лукашевич А.А., Розин Л.А. О решении контактных задач строительной механики с односторонними связями и трением методом пошагового анализа

## Литература

1. Вовкушевский А. В., Шойхет Б. А. Расчет массивных гидротехнических сооружений с учетом раскрытия швов. М.: Энергоиздат, 1981. 136 с.
2. Вовкушевский А. В., Розин Л. А., Рукавишников В. А. Разработка методов расчета сооружений с учетом сложных контактных взаимодействий // Известия вузов. Строительство. 1994. №12. С. 25–29.
3. Wriggers P., Nackenhorst U. Analysis and Simulation of Contact Problems. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 394 p.
4. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 521 p.
5. Kikuchi N., Oden J. T. Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics. Philadelphia. 1988. Vol. 8. 509 p.
6. Laursen T. A., Kim T. Y., Dolbow J. E. A Mortared Finite Element Method for Frictional Contact on Arbitrary Surfaces // Computational Mechanics. 2007. №39. Pp. 223–235.
7. Laursen T. A., Yang B. A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations // Computational Mechanics. 2008. №41. Pp. 189–205.
8. Зернин М. В. [и др.] Моделирование контактного взаимодействия с использованием механики «контактной псевдосреды» // Прочность и надежность машин. Вестник БГТУ. 2007. №4(16). С. 62–72.
9. Подгорный А. Н. [и др.] Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций. Киев: Наукова думка, 1989. 232 с.
10. Кравчук А. С. Вариационный метод в контактных задачах. Состояние проблемы, направления развития // Прикладная математика и механика. 2009. №3. С. 492–502.
11. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989. 494 с.
12. Francawilla A., Zienkiewicz O. C. A note on numerical computation of elastic contact problem // International Journal For Numerical Methods in Engineering. 1975. Vol. 9. №4. Pp. 913–924.
13. Люминарский И. Е. Расчет упругих систем с односторонними связями. М.: Изд-во МГИУ, 2006. 308 с.
14. Лукашевич А. А. Построение и реализация схем прямого метода конечных элементов для решения контактных задач // Известия вузов. Строительство. 2007. №12. С. 18–23.
15. Лукашевич А. А. Решение контактных упругих задач с трением Кулона при пошаговом нагружении // Известия вузов. Строительство. 2008. №10. С. 14–21.
16. Бате Л., Вилсон Е. Численные методы анализа и метод конечных элементов. М.: Стройиздат, 1982. 448 с.
17. Розин Л. А., Лукашевич А. А. Численное решение контактных задач с трением при динамических воздействиях // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2010. №4 (110). С. 288–294.
18. Розин Л. А., Смирнов М. С. Решение контактных задач теории упругости с податливостью в односторонних связях // Известия вузов. Строительство. 2000. №5. С. 27–31.
19. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Расчет сооружений с учетом последовательного возведения и наличия односторонних связей на контактах // Научно-технические ведомости СПбГПУ. 2009. №4-1(89). С. 74–78.
20. Бухарцев В. Н., Лукашевич А. А. Решение задачи о взаимодействии водобойной плиты крепления с основанием при пульсации давления в сбрасываемом потоке // Гидротехническое строительство. 2010. №4. С. 52–55.

\* Анатолий Анатольевич Лукашевич, Санкт-Петербург, Россия

Тел. моб.: +7(911)821-25-53; эл. почта: a.luk@bk.ru

© Лукашевич А.А., Розин Л.А., 2013

doi: 10.5862/MCE.36.9

## On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis

**A.A. Lukashevich;****L.A. Rozin,***Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia  
+7(911)821-25-53; e-mail: a.luk@bk.ru*

### Key words

contact problem; unilateral constraints; friction; step-by-step analysis; working scheme; discrete model; contact element

### Abstract

Constructively nonlinear problems with unilateral constraints and friction with unknown in advance contact zone are frequent in the calculation of various structures. Nowadays the numerical solution of contact problems is being realized usually on the basis of different schemes of finite-element method.

A computational model of contact of elastic systems with using the contact finite elements in form of plane frame or space frame is proposed. The numerical method, based on the discrete model and step-by-step schemes, allows the analysis of contact interaction in problems of structural mechanics and has advantages when the problem decision depends on character and history of the loading facilities.

The problems of structures and buildings analysis with unilateral constraints and friction both for static and dynamic loads are considered and taking into account the complicated conditions of contact and other factors, which approximate the design scheme to the real structure conditions.

### References

1. Vovkushevskiy A. V., Shoykhet B. A. *Raschet massivnykh gidrotekhnicheskikh sooruzheniy s uchetom raskrytiya shvov* [Analysis of massive hydraulic engineering constructions taking into account disclosure of joints]. Moscow: Energoizdat, 1981. 136 p. (rus)
2. Vovkushevskiy A. V., Rozin L. A., Rukavishnikov V. A. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*. 1994. No. 12. Pp. 25–29. (rus)
3. Wriggers P., Nackenhorst U. *Analysis and Simulation of Contact Problems*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 394 p.
4. Wriggers P. *Computational Contact Mechanics*. Berlin-Heidelberg: Springer, 2006. 521 p.
5. Kikuchi N., Oden J. T. *Contact Problems in Elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods*. *SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics*. Philadelphia. 1988. Vol. 8. 509 p.
6. Laursen T. A., Kim T. Y., Dolbow J. E. A Mortared Finite Element Method for Frictional Contact on Arbitrary Surfaces. *Computational Mechanics*. 2007. No. 39. Pp. 223–235.
7. Laursen T. A., Yang B. A contact searching algorithm including bounding volume trees applied to finite sliding mortar formulations. *Computational Mechanics*. 2008. No. 41. Pp. 189–205.
8. Zernin M. V. [et al.] *Prochnost i nadezhnost mashin. Vestnik BGTU*. 2007. No. 4 (16). Pp. 62–72. (rus)
9. Podgornyy A. N. [et al.] *Zadachi kontaknogo vzaimodeystviya elementov konstruktsiy* [Problems of contact interaction of design elements]. Kiev: Naukova Dumka, 1989. 232 p. (rus)
10. Kravchuk A. S. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2009. No. 3. Pp. 492–502. (rus)
11. Panagiotopoulos P. *Neravenstva v mekhanike i ikh prilozheniya. Vypuklyye i nevypuklyye funktsii energii* [Inequalities in mechanics and their applications. Convex and non-convex energy functions]. Moscow: Mir, 1989. 494 p. (rus)
12. Francawilla A., Zienkiewicz O. C. A note on numerical computation of elastic contact problem. *International Journal Numerical Methods Engineering*. 1975. Vol. 9. No. 4. Pp. 913–924.
13. Lyuminarskiy I. E. *Raschet uprugikh sistem s odносторонними svyazyami* [Analysis of elastic systems with unilateral constraints]. Moscow: Izd-vo MGIU, 2006. 308 p. (rus)

Lukashevich A.A., Rozin L.A. On the decision of contact problems of structural mechanics with unilateral constraints and friction by step-by-step analysis



14. Lukashevich A. A. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*. 2007. No. 12. Pp. 18–23. (rus)
15. Lukashevich A. A. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*. 2008. No. 10. Pp. 14–21. (rus)
16. Bate L., Wilson E. *Chislennyye metody analiza i metod konechnykh elementov* [Numerical methods and finite element analysis]. Moscow: Stroyizdat, 1982. 448 p. (rus)
17. Rozin L. A., Lukashevich A. A. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2010. No. 4 (110). Pp. 288–294. (rus)
18. Rozin L. A., Smirnov M. S. *Izvestiya vuzov. Stroitelstvo*. 2000. No. 5. Pp. 27–31. (rus)
19. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti SPbGPU*. 2009. No. 1 (89). Pp. 74–78. (rus)
20. Bukhartsev V. N., Lukashevich A. A. *Gidrotekhnicheskoye stroitelstvo*. 2010. No. 4. Pp. 52–55. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 75-81**