

Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней

Д.т.н., профессор, В.В. Лалин;
Д.ф.-м.н., профессор, Л.А. Розин;
аспирант Д.А. Кушова,*

ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет

Ключевые слова: большие перемещения и повороты; энергетически сопряженные усилия и деформации; функционал вариационной постановки; уравнения устойчивости

Традиционный подход в вариационной постановке задачи нелинейного деформирования стержней заключается в использовании вариационного уравнения в виде принципа возможных перемещений [1-17]. В настоящей работе на примере плоской задачи показывается, что с использованием энергетически сопряженных векторов усилий и деформаций [18] вариационную задачу можно сформулировать в виде задачи поиска точки стационарности функционала типа Лагранжа. При этом появляется возможность двумя способами получить уравнения устойчивости: как уравнения в вариациях для исходной дифференциальной постановки и как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.

Постановка задачи

Рассматривается общая геометрически нелинейная теория упругих стержней, в которой учитываются деформации изгиба, сдвига и растяжения-сжатия, а на величины перемещений и поворотов не накладывается никаких ограничений. В плоской задаче каждая точка такого стержня обладает тремя степенями свободы – двумя поступательными и одной вращательной.

Выберем в качестве отсчетной ненапряженной конфигурации (ОК) первоначально прямолинейного стержня его расположение вдоль оси X правой декартовой системы координат X, Y, Z (рис. 1а) с ортами i, j, k соответственно. В ОК положение каждой точки стержня задается координатой x_0 , $0 \leq x_0 \leq L$, где L – исходная длина стержня.

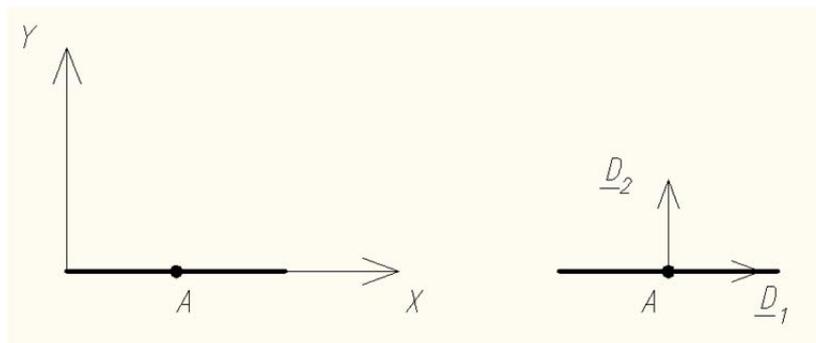


Рисунок 1а. Отсчетная ненапряженная конфигурация стержня (ОК)

Далее будет использоваться материальное (лагранжево) описание, в котором все характеристики напряженно-деформированного состояния зависят от переменной x_0 , причем (...)’ будет обозначать производную по x_0 .

В теории Коссера – Тимошенко с каждой точкой стержня связан репер (правая ортонормированная тройка векторов), векторы которого в ОК обозначим D_i . Для первоначально прямолинейного без естественного закручивания стержня можно принять, что вектор D_1 направлен по оси стержня, векторы D_2, D_3 – по главным центральным осям инерции сечения (рис. 1а), причем $D_i = \text{const}(x_0)$, $D_1 = i$, $D_2 = j$.

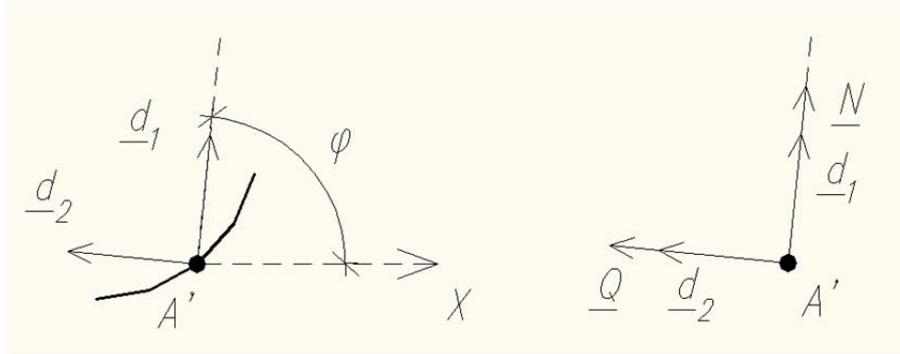


Рисунок 16. Актуальная (деформированная) конфигурация стержня (АК)

На рис. 16 изображена актуальная (деформированная) конфигурация стержня (АК). Положение каждой точки стержня в АК задается вектором

$$r(x_0) = x(x_0) i + y(x_0) j.$$

Векторы репера в повернутом положении обозначены

$$d_i = d_i(x_0),$$

причем вектор d_1 не обязан совпадать с вектором t , единичным вектором, касательным к оси стержня в АК. В плоской задаче поворот репера определяется вектором

$$\Phi(x_0) = \varphi(x_0) k.$$

Функции $x(x_0)$, $y(x_0)$, $\varphi(x_0)$ представляют собой три степени свободы в плоской задаче геометрически нелинейного деформирования стержня.

Истинные векторы усилий в АК в плоской задаче:

$$f(x_0) = N(x_0) d_1 + Q(x_0) d_2, \quad M(x_0) = M(x_0) k,$$

соответствующие им векторы деформаций:

$$e(x_0) = r' - P \cdot r_0', \quad \psi(x_0) = \varphi' k,$$

где N – продольная сила; Q – поперечная сила; M – изгибающий момент; $r_0 = x_0 i$ – радиус-вектор точек стержня в ОК; точкой обозначается скалярное произведение; $P(x_0)$ – тензор поворота, задающий поворот отсчетного репера D_i в актуальный репер d_i : $d_i = P \cdot D_i$; матричное

представление тензора поворота в плоской задаче: $P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$; обратный поворот из АК в ОК задается транспонированным тензором P^T .

В работе [18] показано, что при использовании отсчетного описания удобнее использовать повернутые из АК в ОК векторы усилий и деформаций: $F = P^T \cdot f$, $E = P^T \cdot e$ (повернутые векторы моментов и изгибных деформаций в плоской задаче совпадают с истинными). Повернутые векторы усилий и деформаций являются энергетически сопряженными в смысле следующего определения [18]:

$$\dot{W} = F \cdot \dot{E} + M \cdot \dot{\psi},$$

где $W = W(E, \psi)$ – линейная плотность энергии деформации упругого (в том числе и нелинейно-упругого) стержня, точкой сверху обозначена производная по времени.

Повернутые векторы усилий и деформаций в плоской задаче:

$$F(x_0) = N(x_0) i + Q(x_0) j, \quad M(x_0) = M(x_0) k, \\ E(x_0) = \varepsilon i + \Gamma j, \quad \psi(x_0) = \psi k = \varphi' k.$$

Выражения для компонент деформаций ε , Γ через функции $x(x_0)$, $y(x_0)$, $\varphi(x_0)$ приведены далее.

Постановка геометрически нелинейной задачи для физически линейного стержня состоит из трех групп уравнений (1) – (3).

Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} (N \cos \varphi - Q \sin \varphi)' + q_x = 0 \\ (N \sin \varphi + Q \cos \varphi)' + q_y = 0 \\ M' + x'(N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + y'(Q \sin \varphi - N \cos \varphi) + m = 0 \end{cases}, \quad (1)$$

где q_x, q_y, m – распределенные силовые и моментная нагрузки соответственно.

Геометрические уравнения:

$$\begin{cases} \varepsilon = x' \cos \varphi + y' \sin \varphi - 1 \\ \Gamma = -x' \sin \varphi + y' \cos \varphi \\ \psi = \varphi' \end{cases}. \quad (2)$$

Физические уравнения:

$$\begin{cases} N = k_1 \varepsilon \\ Q = k_2 \Gamma \\ M = k_3 \psi \end{cases}, \quad (3)$$

где k_1, k_2, k_3 – жесткости стержня на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб соответственно.

Граничные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ M(0) = 0 \end{cases}, \quad (4)$$

$$\begin{cases} y(L) = 0 \\ M(L) = 0 \\ N(L) = -P \end{cases}. \quad (5)$$

Граничные условия (4) и (5) соответствуют схеме, приведенной на рис. 2.

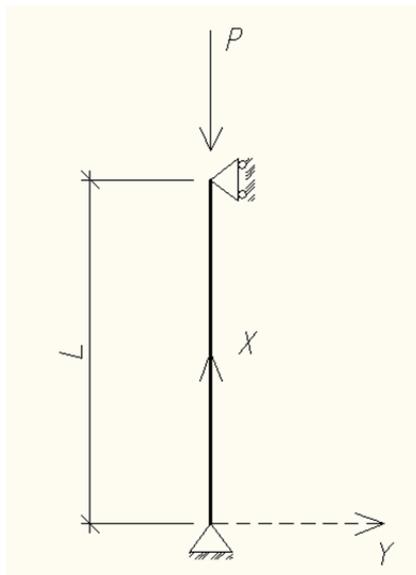


Рисунок 2. Расчетная схема стержня

Подразумеваем, что в уравнениях (4) – (5) внутренние усилия выражены через x, y, φ с помощью уравнений (2), (3).

Соответствующие (1) – (3) уравнения в вариациях [19]:

$$\left\{ \begin{array}{l} (N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi})' - f'(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi}) + f q_y = 0 \\ (N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi})' + f'(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi}) - f q_x = 0 \\ M' + \bar{Q} \varepsilon - \bar{N} \Gamma + Q(\varepsilon + 1) - N \Gamma = 0 \\ \varepsilon = -x' f \sin \bar{\varphi} + h_1' \cos \bar{\varphi} + y' f \cos \bar{\varphi} + h_2' \sin \bar{\varphi} \\ \Gamma = -x' f \cos \bar{\varphi} - h_1' \sin \bar{\varphi} - y' f \sin \bar{\varphi} + h_2' \cos \bar{\varphi} \\ \psi = f' \\ N = k_1 \varepsilon \\ Q = k_2 \Gamma \\ M = k_3 \psi \end{array} \right. \quad (6)$$

Для получения уравнений (6) в исходных уравнениях (1) – (3) искомым функциям давалось приращение, зависящее от параметра α , и затем вычислялось значение производной по α в точке $\alpha=0$.

В уравнениях (6) h_1, h_2, f – вариации координат x, y и угла поворота φ соответственно; $N, Q, M, \varepsilon, \Gamma, \psi$ – соответствующие h_1, h_2, f вариации внутренних усилий и деформаций.

Величинами с чертой в формуле (6) и в дальнейшем обозначаются характеристики напряженно-деформированного состояния, удовлетворяющие системе уравнений (1) – (5). То есть это характеристики того равновесного напряженно-деформированного состояния, устойчивость которого исследуется.

Вариационная формулировка статической задачи

Функционал Лагранжа:

$$\Pi(x, y, \varphi) = \int_0^L \left[\frac{1}{2} (k_1 \varepsilon^2 + k_2 \Gamma^2 + k_3 \psi^2) - q_x (x - x_0) - q_y y - m \varphi \right] dx_0 + P(x(L) - L) \quad (7)$$

Первая вариация функционала:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(x, y, \varphi, h_1, h_2, f) &= \left. \frac{d}{d\alpha} \Pi(x + \alpha h_1, y + \alpha h_2, \varphi + \alpha f) \right|_{\alpha=0} = \\ &= \int_0^L \left\{ h_1' (N \cos \varphi - Q \sin \varphi) + h_2' (N \sin \varphi + Q \cos \varphi) + M f' + f [N (y' \cos \varphi - x' \sin \varphi) - \right. \\ &\left. - Q (x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)] - q_x h_1 - q_y h_2 - m f \right\} dx_0 + P h_1(L) \end{aligned} \quad (8)$$

Подразумеваем, что внутренние усилия M, Q, N выражены через x, y, φ с помощью уравнений (2), (3).

Решением вариационной задачи являются функции x, y, φ такие, что $\delta \Pi = 0$ при любых функциях h_1, h_2, f , удовлетворяющих главным граничным условиям исходной задачи (1) – (5), то есть

$$\begin{cases} h_1(0) = 0 \\ h_2(0) = h_2(L) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Интегрируя выражение (8) по частям и учитывая условия (9), можно показать, что уравнениями Эйлера вариационной задачи $\Pi \rightarrow \text{СТАЦ}$ являются уравнения (1), в которых внутренние усилия выражены через x, y, φ .

Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней

Вариационная формулировка задачи устойчивости

Вторая вариация функционала:

$$\delta^2 \Pi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1, h_2, f) = \frac{d}{d\alpha} \delta \Pi(\bar{x} + \alpha h_1, \bar{y} + \alpha h_2, \bar{\varphi} + \alpha f) \Big|_{\alpha=0} \quad (10)$$

Обозначим: $\delta^2 \Pi \equiv \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1, h_2, f)$.

$$\Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1, h_2, f) = \int_0^L (N\varepsilon + Q\Gamma + \bar{N}f\Gamma + \bar{N}f(h_2' \cos \bar{\varphi} - h_1' \sin \bar{\varphi}) + \bar{Q}f(-h_2' \sin \bar{\varphi} - h_1' \cos \bar{\varphi}) + \bar{Q}f\varepsilon + Mf') dx_0 \quad (11)$$

Уравнения устойчивости являются уравнениями Эйлера вариационной задачи $\Phi \rightarrow \text{СТАЦ}$ [19]. Найдем первую вариацию функционала Φ :

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= \frac{d}{d\alpha} \Phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varphi}, h_1 + \alpha d_1, h_2 + \alpha d_2, f + \alpha g) \Big|_{\alpha=0} \\ \delta \Phi &= \int_0^L [k_1 \varepsilon (d_1' \cos \bar{\varphi} + d_2' \sin \bar{\varphi} + g(\bar{y}' \cos \bar{\varphi} - \bar{x}' \sin \bar{\varphi})) + N(d_1' \cos \bar{\varphi} + d_2' \sin \bar{\varphi} + \\ &+ g(\bar{y}' \cos \bar{\varphi} - \bar{x}' \sin \bar{\varphi})) + [k_2 \Gamma (d_2' \cos \bar{\varphi} - d_1' \sin \bar{\varphi} - g(\bar{y}' \sin \bar{\varphi} + \bar{x}' \cos \bar{\varphi})) + \\ &+ Q(d_2' \cos \bar{\varphi} - d_1' \sin \bar{\varphi} - g(\bar{y}' \sin \bar{\varphi} + \bar{x}' \cos \bar{\varphi})) + \bar{N}g\Gamma + \bar{N}f[d_2' \cos \bar{\varphi} - d_1' \sin \bar{\varphi} - \\ &- g(\bar{y}' \sin \bar{\varphi} + \bar{x}' \cos \bar{\varphi})) + \bar{N}g(h_2' \cos \bar{\varphi} - h_1' \sin \bar{\varphi}) + \bar{N}f(d_2' \cos \bar{\varphi} - d_1' \sin \bar{\varphi}) - \\ &- \bar{Q}g(h_2' \sin \bar{\varphi} + h_1' \cos \bar{\varphi}) - \bar{Q}f(d_1' \cos \bar{\varphi} + d_2' \sin \bar{\varphi}) + \bar{Q}g\varepsilon + \bar{Q}f[d_1' \cos \bar{\varphi} + d_2' \sin \bar{\varphi} + \\ &+ g(\bar{y}' \cos \bar{\varphi} - \bar{x}' \sin \bar{\varphi})) + k_3 g'f' + Mg'] dx_0 \end{aligned} \quad (12)$$

После интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \delta \Phi &= - \int_0^L \{ [(N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi})' - f'(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi}) - f(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi})'] d_1 + \\ &+ [(N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi})' + f'(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi}) + f(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi})'] d_2 + [M' + \bar{Q}\varepsilon - \\ &- \bar{N}\Gamma + Q(\varepsilon + 1) - \bar{N}\Gamma] g \} dx_0 + [(N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi} - \bar{N}f \sin \bar{\varphi} - \bar{Q}f \cos \bar{\varphi}) d_1 + (N \sin \bar{\varphi} + \\ &+ Q \cos \bar{\varphi} + \bar{N}f \cos \bar{\varphi} - \bar{Q}f \sin \bar{\varphi}) d_2 + Mg'] \Big|_0^L \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнениями Эйлера, вытекающими из условия $\delta \Phi = 0$ при любых функциях d_1, d_2, g , которые удовлетворяют главным граничным условиям исходной задачи (1) – (5), являются следующие:

$$\begin{cases} (N \cos \bar{\varphi} - Q \sin \bar{\varphi})' - f'(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi}) - f(\bar{N} \sin \bar{\varphi} + \bar{Q} \cos \bar{\varphi})' = 0 \\ (N \sin \bar{\varphi} + Q \cos \bar{\varphi})' + f'(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi}) + f(\bar{N} \cos \bar{\varphi} - \bar{Q} \sin \bar{\varphi})' = 0 \\ M' + \bar{Q}\varepsilon - \bar{N}\Gamma + Q(\varepsilon + 1) - \bar{N}\Gamma = 0 \end{cases} \quad (14)$$

Учитывая, что величины с чертой удовлетворяют уравнениям (1), уравнения (14) можно привести к виду (6). То есть уравнения в вариациях для исходной нелинейной системы уравнений совпадают с уравнениями Эйлера для вариационной задачи $\Phi \rightarrow \text{СТАЦ}$, где Φ – вторая вариация функционала Лагранжа (7) [19].

Таким образом, уравнения (6) или (14) являются точными уравнениями задачи устойчивости равновесия стержня для плоской задачи.

Подчеркнем, что полученная система уравнений устойчивости (6) является точной. При ее выводе не делалось никаких упрощающих предположений о величинах перемещений и углов поворота, а также о характере напряженно-деформированного состояния стержня.

Пример решения задачи устойчивости равновесия

Рассмотрим в качестве примера стержень, представленный на рис. 2.

Исходная равновесная конфигурация – прямолинейная, действует только сжимающая сила.

В обозначении известных нам величин заменим черту на индекс 0, лагранжеву координату будем обозначать x .

Для данного примера:

$$M_0 = 0, Q_0 = 0, \varphi_0 = 0, \Gamma_0 = 0, q_y = 0, y_0 = 0, q_x = 0.$$

$$N_0 = -P, \quad \varepsilon_0 = x_0' - 1 = \frac{N_0}{k_1}.$$

$$\cos \varphi_0 = 1, \quad \sin \varphi_0 = 0.$$

Таким образом, уравнения устойчивости (6) запишутся в виде:

$$\begin{cases} N' = 0 \\ -Pf' + Q' = 0 \\ M' + Q\left(\frac{-P}{k_1} + 1\right) + P(-x_0'f + h_2') = 0 \\ \varepsilon = h_1' \\ \Gamma = -x_0'f + h_2' \\ \psi = f' \\ N = k_1 h_1' \\ Q = k_2(-x_0'f + h_2') \\ M = k_3 f' \end{cases} \quad (15)$$

Для удобства применим стандартные обозначения для вариаций:

$$h_1 = u, \quad h_2 = v, \quad f = \theta.$$

Тогда, для однородного стержня, жесткости которого не зависят от x , получим

$$\begin{cases} k_1 u_1'' = 0 \\ -P\theta' + k_2 \left[v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) \theta \right]' = 0 \\ k_3 \theta'' + k_2 \left[v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) \theta \right] \left[\left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) + P \left(- \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) \theta + v' \right) \right] = 0 \end{cases} \quad (16)$$

В полученной системе (16) первое уравнение описывает продольные деформации и не зависит от второго и третьего уравнений. Следовательно, устойчивость проверяется только из второго и третьего уравнений.

Из третьего уравнения (16):

$$\left(v' - \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) \theta \right) = \frac{k_3 \theta''}{- \left[k_2 \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) + P \right]}.$$

После подстановки во второе уравнение получим:

$$\theta''' + \lambda^2 \theta' = 0, \tag{17}$$

где

$$\lambda^2 = \frac{P \left[k_2 \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) + P \right]}{k_2 k_3}. \tag{18}$$

Решение уравнения (17) имеет вид:

$$\theta(x) = c_1 \sin \lambda x + c_2 \cos \lambda x + c_3.$$

Подставив данное решение в уравнение, полученное из третьего уравнения (16), и проинтегрировав его, получим:

$$v(x) = \frac{k_3 (-c_2 \lambda \sin \lambda x)}{-P - k_2 \left(1 - \frac{P}{k_1} \right)} + \left(\frac{c_2}{\lambda} \sin \lambda x + c_3 x \right) \left(1 - \frac{P}{k_1} \right) - c_4.$$

Определим произвольные постоянные, используя граничные условия

$$\begin{aligned} v(0) = v(L) = 0 \\ \text{Т.к. } M = k_3 \theta', \quad M(0) = M(L) = 0, \text{ то } \theta'(0) = \theta'(L) = 0 \end{aligned} \tag{19}$$

Используя условия (19), получим:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_3 &= 0 \\ c_4 &= 0 \\ \theta(x) &= c_2 \cos \lambda x \\ \theta'(L) &= -c_2 \lambda \sin \lambda L = 0 \end{aligned}$$

Рассматриваем решение уравнения $\sin \lambda L = 0$:

$$\lambda L = \pi n, \text{ где } n=1,2,3,\dots$$

Подставим значение λ в выражение (18):

$$\frac{P \left[k_2 \left(\frac{-P}{k_1} + 1 \right) + P \right]}{k_2 k_3} = \frac{\pi^2 n^2}{L^2}.$$

Отсюда получим единственное положительное значение P:

$$P = \frac{-k_2 + \sqrt{k_2^2 + 4 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right) \left(\frac{n^2 \pi^2 k_2 k_3}{L^2} \right)}}{2 \left(1 - \frac{k_2}{k_1} \right)}. \tag{20}$$

Критическое (наименьшее) значение силы P достигается при n=1.

$$P = \frac{k_2}{2} \frac{\sqrt{1 + \frac{4P_3}{k_2} \left(1 - \frac{1}{k_1}\right)} - 1}{\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right)}. \quad (21)$$

где P_3 – сила Эйлера [20], равная $P_3 = \frac{\pi^2 k_3}{L^2}$.

Решение (21) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на растяжение-сжатие, сдвиг и изгиб. Далее рассмотрим частные случаи.

Рассмотрим случай большой жесткости на растяжение-сжатие:

$$\frac{1}{k_1} = 0.$$

Тогда

$$P = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4P_3}{k_2}} - 1 \right). \quad (22)$$

Решение (22) представляет собой точное решение задачи устойчивости шарнирно опертого стержня с учетом жесткостей на сдвиг и изгиб.

Рассмотрим случай большой жесткости на сдвиг: $\frac{1}{k_2} \rightarrow 0$.

Раскладывая подкоренное выражение из формулы (22) в ряд и учитывая слагаемые первого и второго порядка малости, получим:

$$P = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4P_3}{k_2}} - 1 \right) = \frac{k_2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4P_3}{k_2} - \frac{1}{4 \cdot 2!} \left(\frac{4P_3}{k_2} \right)^2 - 1 \right) = P_3 \left(1 - \frac{P_3}{k_2} \right).$$

Окончательно,

$$P = P_3 \left(1 - \frac{P_3}{k_2} \right). \quad (23)$$

Решение (23) с точностью до малых второго порядка совпадает с известным приближенным решением Энгессера [20]:

$$P = \frac{P_3}{1 + \frac{P_3}{k_2}}. \quad (24)$$

Раскладывая подкоренное выражение из формулы (22) в ряд и учитывая слагаемые только первого порядка малости, получим:

$$P = \frac{k_2}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{4P_3}{k_2}} - 1 \right) = \frac{k_2}{2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{4P_3}{k_2} - 1 \right) = P_3. \quad (25)$$

Таким образом, если $\frac{1}{k_1} = 0$ и $\frac{1}{k_2} = 0$, то из решения (21), согласно формуле (25), получим классическое решение Эйлера.

Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А. Вариационная постановка плоской задачи геометрически нелинейного деформирования и устойчивости упругих стержней

Чтобы оценить погрешность формулы Энгессера (24), выразим (22) и (24) в безразмерных коэффициентах $\frac{P_3}{k_2}$ и построим графики для обеих формул. В качестве примера (рисунок 3)

приведены графики для стойки длиной 3м, выполненной из колонного двутавра 20К1 (высота двутавра $h = 195$ мм, ширина полки $b = 200$ мм, площадь сечения $A = 52.820$ см², минимальный момент инерции $J_z = 1334$ см⁴, жесткость на сдвиг $k_2 = 507.072 \cdot 10^6$ Н, сила Эйлера $P_3 = 3.067 \cdot 10^6$ Н). Вертикальная линия соответствует пятипроцентной разнице между точным значением (22) и значением, полученным по формуле Энгессера (24). Значения, расположенные левее линии, соответствуют разнице менее 5%, расположенные правее, соответственно, более. Таким образом, можно сделать вывод, что формула Энгессера дает заниженное значение критической нагрузки, что наглядно отображено на графике.

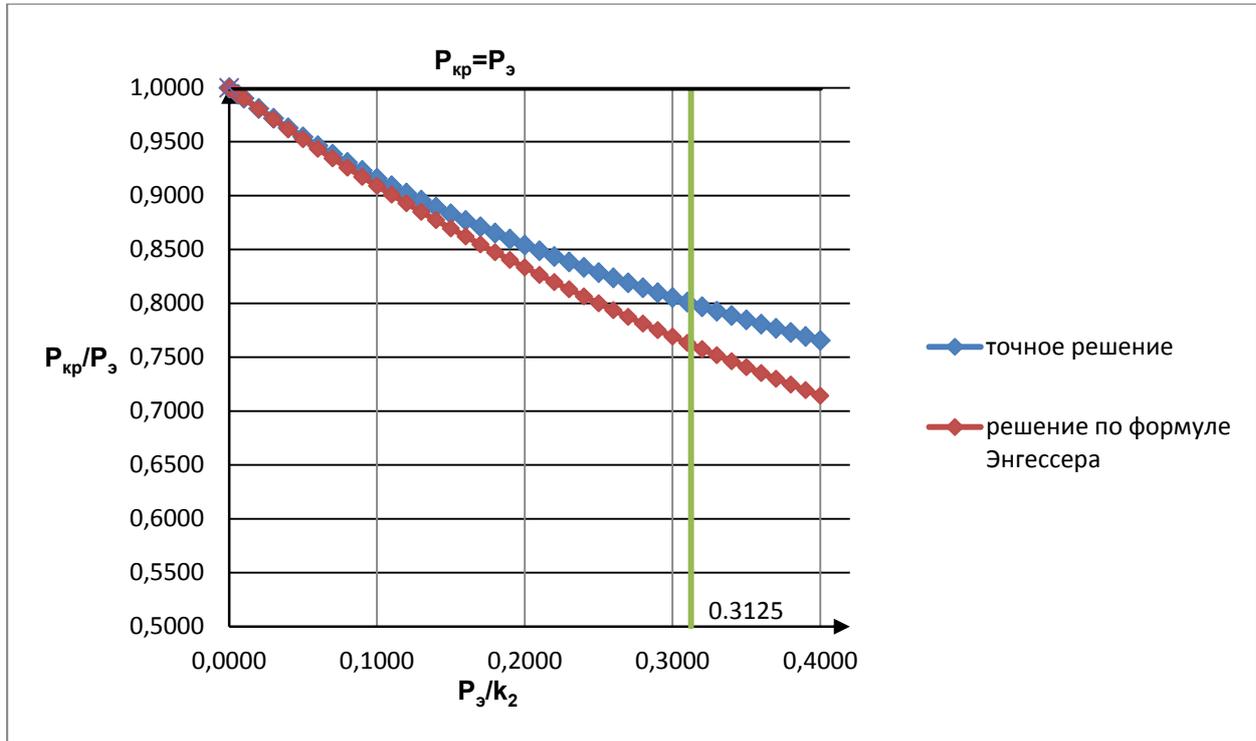


Рисунок 3. Влияние жесткости на сдвиг на величину критической нагрузки для точного решения и для решения по формуле Энгессера

Выводы

1. С использованием энергетически сопряженных векторов внутренних усилий и деформаций приведена постановка статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских упругих стержней в виде системы дифференциальных уравнений.
2. Приведено выражение для функционала типа Лагранжа вариационной постановки статических задач геометрически нелинейного деформирования плоских стержней.
3. Для гладких решений доказана эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач.
4. Двумя способами получены уравнения плоских задач устойчивости равновесия: как уравнения в вариациях для исходной системы дифференциальных уравнений и как уравнения Эйлера для второй вариации функционала Лагранжа.
5. Для шарнирно опертого стержня получено точное решение задачи устойчивости равновесия с учетом жесткостей на изгиб, сдвиг и растяжение-сжатие.
6. Проведено исследование погрешности известной формулы Энгессера, позволяющей приближенно учесть влияние сдвиговой жесткости на величину критической силы. Показано, что формула Энгессера дает заниженное значение критической силы по сравнению с точным решением.

Литература

1. Голоскоков Д.П., Жилин П.А. Общая нелинейная теория упругих стержней с приложением к описанию эффекта Пойнтинга // Депонировано ВИНТИ. №1912-В87. 20 с.
2. Елиссеев В.В. Механика упругих стержней. СПб.: СПбГПУ, 1994. 88 с.
3. Жилин П.А., Сергеев А.Д. Равновесие и устойчивость тонкого стержня, нагруженного консервативным моментом // Механика и процессы управления // Труды СПбГТУ. 1994. №448. С. 47-56.
4. Жилин П.А., Сергеев А.Д., Товстик Т.П. Нелинейная теория стержней и ее приложения // Труды XXIV летней школы «Анализ и синтез нелинейных механических колебательных систем». СПб., 1997. С. 313 – 337.
5. Жилин П.А. Прикладная механика. Теория тонких упругих стержней. СПб.: СПбГПУ, 2007. 102 с.
6. Елиссеев В.В., Зиновьева Т.В. Механика тонкостенных конструкций. Теория стержней. СПб.: СПбГПУ, 2008. 96 с.
7. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects // Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79-116.
8. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1995. Vol. 38. Issue 9. Pp. 1431-1473.
9. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for static and dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 1999. Vol. 171. №1-2. Pp. 141-171.
10. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory // ASME Journal of Mechanical Design. 2001. Vol.123. №4. Pp. 606–613.
11. Reddy J.N. An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis. Oxford: Oxford University Press, 2004. 482 p.
12. Antman S.S. Nonlinear problems of elasticity. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 2005. 835 p.
13. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation // Nonlinear Dynamics. 2006. Vol. 45. №1-2. Pp. 109-130.
14. Shabana A.A. Computational continuum mechanics. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 349 p.
15. Wriggers P. Nonlinear finite element methods. Berlin– Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 566 p.
16. Krenk S. Non-linear modelling and analysis of solids and structures. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p.
17. Ibrahimbegovic A. Nonlinear Solid Mechanics. Berlin: Springer, 2009. 596 p.
18. Лалин В.В. Различные формы уравнений нелинейной динамики упругих стержней // Труды СПбГПУ. 2004. №489. С. 121-128.
19. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление. М.: Едиториал УРСС, 2004. 160 с.
20. Перельмутер А.В., Сливкер В.И. Устойчивость равновесия конструкций и родственные проблемы. Том 1. М.: СКАД СОФТ, 2010. 704 с.

* Владимир Владимирович Лалин, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7 (812) 552-60-87; эл. почта: smitu@cef.spbstu.ru

© Лалин В.В., Розин Л.А., Кушова Д.А., 2013

doi: 10.5862/MCE.36.11

Variational functionals for two-dimensional equilibrium and stability problems of Cosserat-Timoshenko elastic rods

V.V. Lalin;

L.A. Rozin;

D.A. Kushova,

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia

+7 (812) 552-60-87; e-mail: smitu@cef.spbstu.ru

Key words

large displacements and rotations; energy conjugate forces and deformations; variational functional; equations of stability

Abstract

This article deals with nonlinear two-dimensional problem of the theory of elastic Cosserat-Timoshenko rods in the material (Lagrangian) description with energy conjugate stress and deformation vectors.

Equivalence of the differential and variational formulations of the problem was proved for smooth solutions. The expression for the second variation of the Lagrangian functional was derived. The differential equations for the stability problem were obtained from the second variation of the Lagrangian functional. Two types of equation of plane problems of stability of equilibrium are obtained: variational equations for initial system of differential equations and Euler equations for the second variation of the Lagrangian functional.

Exact solution of the stability problem accounting for the deformations of bending, shear and tension-compression was obtained for the pivotally supported rod.

References

1. Goloskokov D.P., Zhilin P.A. *Obshchaya nelineynaya teoriya uprugikh sterzhney s prilozheniem k opisaniyu effekta Poyntinga* [General nonlinear theory of elastic rods with application to the description of the Poynting's effect]. Deposited VINITI. No. 1912-V87. 20 p. (rus)
2. Eliseyev V.V. *Mekhanika uprugikh sterzhney* [Mechanics of elastic rods]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 1994. 88 p. (rus)
3. Zhilin P.A., Sergeev A.D. *Trudy SPbGTU*. 1994. No. 448. Pp. 47-56. (rus)
4. Zhilin P.A., Sergeev A.D., Tovstik T.P. *Analiz i sintez nelineynykh mekhanicheskikh kolebatelnykh system. Trudy XXIV letney shkoly*. [Analysis and synthesis of nonlinear mechanical oscillating systems. Proceedings of 24 summer school]. Saint-Petersburg, 1997. Pp. 313 – 337. (rus)
5. Zhilin P.A. *Prikladnaya mekhanika. Teoriya tonkikh uprugikh sterzhney* [Applied mechanics. Theory of thin elastic rods]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2007. 102 p. (rus)
6. Eliseyev V.V., Zinovyeva T.V. *Mekhanika tonkostennykh konstruksiy. Teoriya sterzhney* [Mechanics of thin-walled structures. Theory of rods]. Saint-Petersburg: SPbGPU, 2008. 96 p. (rus)
7. Simo J.C., Vu-Quoc L. A three-dimensional finite-strain rod model. Part II: Geometric and computational aspects. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*. 1986. Vol. 58. Issue 1. Pp. 79-116
8. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: exact energy and momentum conservation algorithms. *International Journal For Numerical Methods In Engineering*. 1995. Vol. 38. Issue 9. Pp. 1431-1473.
9. Jelenic G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for static and dynamics. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*. 1999. Vol. 171. No. 1-2. Pp. 141-171.
10. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three dimensional absolute nodal coordinate formulation for beam elements: theory. *ASME Journal of Mechanical Design*. 2001. Vol.123. No. 4. Pp. 606–613.
11. Reddy J.N. *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2004. 482 p.
12. Antman S.S. *Nonlinear problems of elasticity*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 2005. 835 p.

Lalin V.V., Rozin L.A., Kushova D.A. Variational functionals for two-dimensional equilibrium and stability problems of Cosserat-Timoshenko elastic rods

13. Gerstmayr J., Shabana A.A. Analysis of thin beams and cables using the absolute nodal coordinate formulation. *Nonlinear Dynamics*. 2006. Vol. 45. No.1-2. Pp. 109-130.
14. Shabana A.A. *Computational continuum mechanics*. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 349 p.
15. Wriggers P. *Nonlinear finite element methods*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 566 p.
16. Krenk S. *Non-linear modelling and analysis of solids and structures*. Cambridge: Cambridge University Press, 2009. 361 p.
17. Ibrahimbegovic A. *Nonlinear Solid Mechanics*. Berlin: Springer, 2009. 585 p.
18. Lalin V.V. *Trudy SPbGPU*. 2004. No. 489. Pp. 121-128. (rus)
19. Zelikin M.I. *Optimalnoye upravleniye i variatsionnoye ischisleniye* [Optimal control and the calculus of variations]. Moscow: Editorial URSS, 2004. 160 p. (rus)
20. Perelmuter A.V., Slivker V.I. *Ustojchivost ravnovesiya i rodstvennye problemy* [Stability of the equilibrium of structures and related problems]. Vol 1. Moscow: SKAD SOFT, 2010. 647 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 87-96