

Обоснование первой критической нагрузки на зернистую среду супесчаного основания

К.т.н., доцент, и.о. заведующего кафедрой А.Н. Баданин;
д.т.н., профессор А.К. Бугров,
ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет;
мастер СМР А.В. Кротов,
ЗАО «ЕВРОМОНОЛИТ»*

Ключевые слова: геомеханика; механика грунтов; теория механики зернистых сред

Сравнение моделей сплошной и дискретной (зернистой) сред

Анализ работ различных авторов показал, что ими были рассмотрены механические явления, возникающие в грунтах при воздействии на них местной нагрузки. При этом были установлены (при давлениях на грунт, больших структурной прочности) две критические нагрузки: $P_{кр1}$ и $P_{кр2}$. Величину $P_{кр1}$ называют начальной критической нагрузкой, еще совершенно безопасной в основаниях сооружений, так как до ее достижения грунт всегда будет находиться в фазе уплотнения. $P_{кр2}$ – предельная, критическая нагрузка, при которой полностью исчерпывается несущая способность грунта.

В настоящее время в рамках модели сплошной среды для определения напряжений в грунтах применяют теорию линейно-деформируемых тел. Положения этой теории как базирующиеся на линейной зависимости между напряжениями и деформациями в упругой стадии (закон Гука) справедливы. Для грунтов в общем случае закон Гука не приемлем, так как при действии внешних сил в грунтах при давлениях, больших структурной прочности, возникают не только упругие, но и значительно большей величины остаточные деформации. Из-за наличия остаточных деформаций грунта решение теории упругости для изотропных тел можно использовать лишь при однократном нагружении.

Поэтому для данного случая значение $P_{кр1}$ рекомендуется определять по формуле Н.П. Пузыревского:

$$P_{кр1} = \frac{\pi(\gamma \cdot d + ctg\varphi)}{ctg\varphi + \varphi - \frac{\pi}{2}} + \gamma \cdot d,$$

где γ – удельный вес грунта основания;
 φ – угол внутреннего трения;
 d – глубина заложения подошвы фундамента;
 c – удельное сцепление.

Эта зависимость получена при решении плоской задачи для равномерно распределенной нагрузки по полосе фиксированной ширины и при наличии боковой пригрузки. Для определения $P_{кр2}$ на грунтовом основании в настоящее время используются приближенные расчетные методы, основанные на теории предельного равновесия. Эти методы разработаны главным образом для условий плоской и осесимметричной задач [1].

По моделям сплошной среды построение определяющих уравнений осуществляется на макроуровне, основанном на феноменологическом подходе. Поэтому, наряду с дальнейшими исследованиями свойств грунтов феноменологическими методами, представляется своевременным обращение к моделям дискретных сред.

Действительно, структура описания деформирования грунта посредством уравнений состояния упрочняющейся упруго-пластичной среды, которая учитывает также правила смещения и поворотов поверхности нагружения (в зависимости от траектории процесса), по уровню сложности вполне сопоставима с описанием взаимодействия между отдельными зёрнами. Однако модель дискретной среды обладает важным преимуществом раскрытия физического механизма межзёрнового взаимодействия на микроуровне.

Отличительной чертой модели дискретной зернистой среды является рассмотрение отдельных элементов ее структуры как механически взаимодействующих тел. Элементами структуры могут быть зёрна сыпучего материала. В настоящее время изучение зернистых сред

идет по двум направлениям, а именно, с позиции теории упаковок и с позиции механики зернистых сред.

Анализ моделей с различными упаковками зернистых материалов показал, что на прочность и деформативность среды существенное влияние оказывает ее структура. К описанию такой среды стараются подойти с позиции достаточно изученной сплошной среды и, следовательно, получают недостатки решений, свойственные полученным решениям на основе моделей сплошной среды.

Механика зернистых сред основывается на системном подходе и вероятностных методах в построении теории распределения напряжений в зернистых средах.

История развития теории зернистых сред в механике грунтов

Одним из первых вопросами механики зернистых сред в середине прошлого века начал заниматься академик Польской Академии наук Е. Литвинишин [2]. Основные достижения польской школы связаны с расчетом диффузионных перемещений зернистой среды. Зернистая среда в чем-то напоминает не твердое тело, а жидкость или газ, поэтому при расчетах желательнее учитывать диффузионные перемещения. К такому заключению пришел российский ученый Р.А. Муллер [3] практически в то же время, что и Е. Литвинишин. Появился термин блуждающей частицы Литвинишина–Муллера.

В 1959 году И.И. Кандауровым была предложена теория дискретного распределения напряжений и деформаций сжатия в грунтовых основаниях восстанавливаемых и строящихся военно-транспортных сооружений. Нужно признать, что хотя методически теории Литвинишина – Муллера для перемещений и теория Кандаурова для напряжений очень близки, все-таки физически они относятся к разным задачам. Польские ученые и Муллер изучают диффузионные перемещения главным образом в свободной, ненагруженной среде. Кандауров изучает напряжения в нагруженной среде, т.е. компрессионные перемещения. Следовательно, для грунтовых условий теория Кандаурова более соответствует действительности. В дальнейшем эта теория получила название теории механики зернистых сред [4, 5]. К изучению распределения давления в грунтах И.И. Кандауровым был применен новый подход: он построил имитационную вероятностную модель распределения давления.

При построении вероятностной имитационной модели И.И. Кандауров все зернистые среды разделил на безраспорные (блочные) и распорные. Вероятностная средняя структура зернистой среды строилась им не на основе плотных детерминированных, а на базе наиболее вероятных упаковок. В результате этого сама изучаемая структура расчетных схем становилась вероятностной. Следующий шаг, очень важный, заключался в замене детерминированного принципа раскрытия статической неопределенности зернистых структур вероятностным принципом.

Задача о распределении давления в зернистой среде рассматривалась автором с двух позиций:

- как вероятностный процесс передачи давления от одних зерен к другим через точки контактов;
- как установившееся состояние, описываемое системой дифференциальных уравнений.

При изучении распределения давления как вероятностного процесса в безраспорных зернистых средах строилась вероятностная башня возможных состояний вертикальной составляющей вектора напряжений от сосредоточенной вертикальной силы. Давление определялось как математическое ожидание – произведение вектора силы на соответствующую вероятность.

При решении задачи о распределении давления в распорной среде было принято, согласно результатам, полученным для безраспорных сред, что плотность распределения вероятностей, определяющих вертикальные напряжения, подчиняется закону Гаусса. Кроме того, для статистически изотропной среды, какой является грунт, принималась гипотеза о прямолинейности распределения давления, как это делал О.К. Фрелих. В связи с вышесказанным параметры кривой нормального распределения вероятностей вертикальной компоненты напряжений определялись по уравнениям равновесия. При этом координаты в уравнении увязываются с направлением действия внешней нагрузки.

Анализ распределения давления в безраспорных зернистых средах показал, что для них непригодны дифференциальные уравнения равновесия Навье. Методом сопоставления безраспорных и распорных зернистых сред И.И. Кандауровым были построены сначала системы дифференциальных уравнений равновесия для безраспорных зернистых сред, а затем обобщенные дифференциальные уравнения равновесия, из которых как частное при составляющих параметрах получаются уравнения для безраспорных и для распорных зернистых сред.

Все уравнения равновесия записываются по ведущей компоненте напряжения, нормальной к площадке, перпендикулярной линии действия внешней силы. Так как она играет ведущую роль в распределении напряжений, автор называет ее доминирующей компонентой.

Исследование процесса распределения давления в зернистых средах на основе вероятностного подхода позволило И.И. Кандаурову обнаружить некоторые закономерности теории вероятности и составить систему уравнений, которая удовлетворяет семейству распределений. Так, например, если главное распределение вероятностей является нормальным (распределение Гаусса), то сопутствующими ему будут распределения Рэлея и Максвелла.

В работах И.И. Кандаурова даны зависимости по определению деформации для различных в плане форм фундаментов и законов распределения действующих на них нагрузок. При этом расчетными характеристиками грунтов являются модуль деформации (E) и коэффициент распределительной способности грунта (λ). Получение модуля деформации как полевыми, так и лабораторными методами хорошо известно. Методики же полевого определения коэффициента λ были обоснованы в работах А.В. Матвеева [6, 7].

За рубежом теорию механики зернистых сред И.И. Кандаурова попытались развить такие ученые, как В. Бжонкала [8], С. Матысяк [9, 10], М.Е. Харр [11] и др., но каких-либо серьезных решений они не достигли.

Представляет интерес предпринятая в Санкт-Петербургском государственном политехническом университете (СПбГПУ) попытка группы ученых (О.И. Заяц, А.Н. Незлобин и др.) использовать наиболее разработанную и совершенную теорию И.И. Кандаурова с учетом теорий Литвинишина-Муллера. Наиболее подробно методы расчета механических характеристик комбинированной зернисто-упругой среды разработаны в монографии [12]. Результаты их исследований неоднократно докладывались на международных конференциях «Nondestructive testing and computer simulations in sciences and engineering» («Неразрушающий контроль и компьютерное моделирование в науке и технике»). Все конференции проводились под эгидой SPIE (The society of photo-optical instrumentation engineers) и сборники трудов печатались в США. К сожалению, последний раз наши ученые участвовали в этих конференциях в 2003 г., после чего группа в силу разных обстоятельств распалась и исследования прекратились [13, 14].

Применимость теории зернистых сред в механике грунтов

Применимость теории зернистых сред до последнего времени ограничивалась грунтами, состоящими из крупных частиц: крупнообломочные породы, гравелистые, крупные и средней крупности пески [15]. Однако и в этих случаях следует отметить, что для успешного применения теории механики зернистых сред И.И. Кандаурова необходимо иметь ограничения. В частности, такими ограничениями являются критические нагрузки, которые в механике зернистых сред не обоснованы. Таким образом, для успешного применения теории зернистых сред необходимо решить **следующие задачи**:

- 1) теоретически обосновать критические нагрузки с точки зрения теории И.И. Кандаурова;
- 2) обосновать применимость теории зернистых сред не только для грунтов крупных фракций, но и других, включая группу глинистых грунтов.

Анализ теорий прочности материалов показал, что наступление предельного равновесия тела может быть вызвано различной комбинацией напряжений, в зависимости от которой различают условия предельного состояния. Для грунтов и сыпучих сред принимают два основных условия: условие Кулона-Мора и условие Мизеса-Шлейхера. Рассмотрим применение условия Кулона-Мора для оценки $P_{кр1}$ зернистых сред. Согласно этой теории, для связной среды, обладающей как трением, так и сцеплением на площадках (с нормалью n) возможного скольжения, соотношение между касательным (τ_n) и нормальным (σ_n) напряжениями рекомендуется определять по зависимости:

$$\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \varphi + c, \quad (1)$$

где φ и c – соответственно величины угла внутреннего трения и сцепления грунта.

Из условия (1) величина нормального напряжения будет равна:

$$\sigma_n = \frac{\tau_n - c}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (2)$$

В механике зернистых сред имеются зависимости для оценки нормальных и касательных напряжений в грунтовом основании сооружения, в том числе и для круглого в плане фундамента, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой в виде:

$$\sigma_z = p \left[1 - \exp \left(\frac{-R^2}{2z\lambda^2} \right) \right], \quad (3)$$

где R – радиус фундамента, м;

p – величина равномерно распределенной нагрузки по подошве круглого фундамента, МПа;

λ – коэффициент распределительной способности среды;

z – координата точки по оси Z , проходящей через центр круглого фундамента.

Так как рассматривается стабилизированное состояние грунтового основания, которое описывается условием (1), то величину λ следует принимать по зависимости (2):

$$\lambda = c \operatorname{tg}(\varphi + 45^\circ). \quad (4)$$

При приложении нагрузки на фундамент в грунте под ним образуется определенная зона, имеющая свои границы и называемая активной зоной. Максимальной величины эта зона достигает при предельной нагрузке. Пересечение этой зоны с осью Z происходит в единственной точке при $Z_j = h_3$, где h_3 – глубина активной зоны. В этой же точке величина касательных напряжений равна нулю ($\tau=0$). Зависимость (2) будет иметь вид:

$$\sigma_n = \frac{-c}{\operatorname{tg} \varphi}. \quad (5)$$

Н.А. Цытович глубину активной зоны для круглых фундаментов рекомендует определять по зависимости [16]:

$$h_3 = 0,887 A_w \cdot D, \quad (6)$$

где $D=2R$ – диаметр круглого фундамента, м;

A_w – коэффициент эквивалентного слоя грунта, принимаемый по табл. 5.6. работы [5] как для круглых жестких фундаментов.

Подставив зависимости (4) и (6) в условие (3) и совершив преобразование, получим:

$$\sigma_z = p \left[1 - \exp \left(\frac{-\operatorname{tg}(\varphi + 45^\circ)}{2z\pi A_w^2} \right) \right]. \quad (7)$$

Формулу (7) подставим в условие (2), полагая, что $\sigma_n = \sigma_z$, и после преобразования получим итоговую формулу первой критической нагрузки:

$$P_{кр1} = \frac{-c}{\operatorname{tg} \left(1 - \exp \left(\frac{-\operatorname{tg}(\varphi + 45^\circ)}{2z\pi A_w^2} \right) \right)}. \quad (8)$$

Согласно ГОСТ 20276-99 «Грунты. Методы полевого определения характеристик прочности и деформируемости», для вычисления модуля деформации E рекомендуется строить график зависимости осадок от давления $S=f(P)$, откладывая по оси абсцисс значение P и по оси ординат соответствующие им условно стабилизированные значения S (рис. 1).

Через нанесенные на график четыре опытные точки проводят осредняющую прямую методом наименьших квадратов или графическим методом. За конечные значения P_n и S_n принимают значения P_i и S_i , соответствующие четвертой точке графика на прямолинейном участке. В нашем случае P_n следует принять за $P_{кр1}$, т.е. $P_n = P_{кр1}$ экспериментальное.

Баданин А.Н., Бугров А.К., Кротов А.В. Обоснование первой критической нагрузки на зернистую среду супесчаного основания

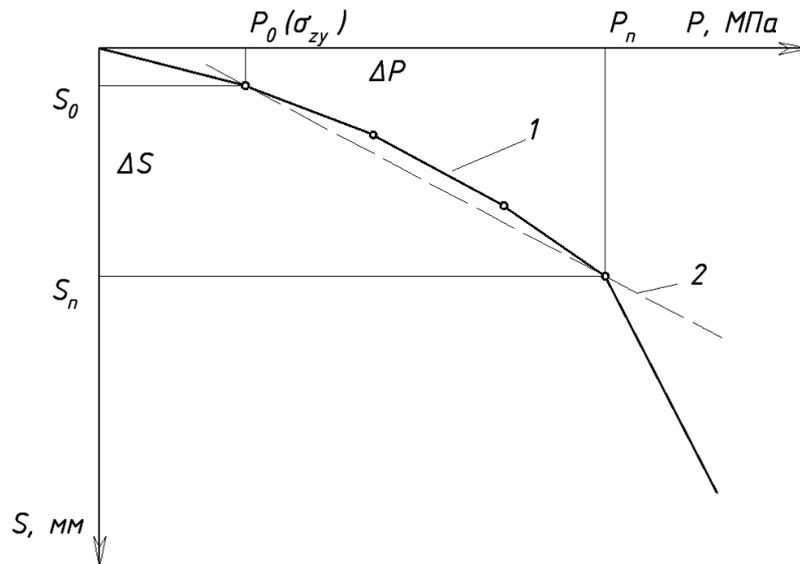


Рисунок 1. График зависимости $S=f(P)$ испытания грунта штампом: 1 – линейная часть графика; 2 – осредняющая прямая

Сопоставление теоретических данных с экспериментальными

Для сопоставления теоретических данных, полученных по зависимости (8), с экспериментальными воспользуемся данными технического отчета о комплексных инженерных изысканиях, выполненных в городе Тихвин Ленинградской области для строительства жилых домов №7-11 и общественных №3А, 10А, 24 в микрорайоне 1А. Проводились полевые и лабораторные работы, были выполнены испытания статическими нагрузками (круглыми штампами). Площадь штампа 600 см^2 , а глубина его установки 2-2,3 м. Было выполнено 6 опытов, результаты которых представлены в таблице 1. Согласно анализу паспортов скважин, штампы устанавливались на слой супесчаных грунтов. Максимальное давление на штамп составило 0,35-0,5 МПа, а интервал определения модуля деформации – 0,05-0,25 Мпа, поэтому за величину первой критической нагрузки следует принять 0,25 МПа. Т.е. $P_{кр1}^3 = 2,5 \text{ кгс/см}^2$.

Таблица 1. Результаты штамповых испытаний ($S = 600 \text{ см}^2$)

№п/п	№выборки	Глубина установки, м	Наименование грунта	Максимальное давление, МПа	Полная осадка, см	Интервал определения модуля деформации, МПа	Модуль деформации, МПа
1	6172	2,3	Супесь пластичная	0,5	13	0,05-0,25	12
2	6175	2,3		0,5	15,35		11
3	6181	2		0,45	10,11		9
4	6185	2,3		0,35	8,88		10
5	6180	2		0,45	4,26		21
6	6183	2		0,5	3,46		31

По показателю текучести I_L супеси являлись пластичными. Они включали 10-15% гравия и гальки изверженных пород, отдельные валуны. Глинистая составляющая находилась в пределах до 16%. Исследования прочностных свойств супесей проводилось на приборе ВСВ-1, на образцах природного сложения без уплотнения в течение 5 мин по методике многоточечного приложения нормальных нагрузок (ИМД 41-75, Стройизыскания).

Прочностные характеристики супесей пластичных по лабораторным данным составили $\varphi_n = 28^\circ$; $c_n = 31 \text{ КПа}$. Подставим эти значения в формулу (8) и получим теоретическое значение нагрузки $P_{кр1}^T$. Оно равно 183,2 КПа. Сопоставим с экспериментальными данными значения первой критической нагрузки. Экспериментальные значения $P_{кр1}^3 = 2,5 \text{ кгс/см}^2$, а $P_{кр1}^T = 1,83 \text{ кгс/см}^2$. Теоретическое значение первой критической нагрузки находится на линейном участке графика Баданин А.Н., Бугров А.К., Кротов А.В. Обоснование первой критической нагрузки на зернистую среду супесчаного основания

нагрузка-осадка и поэтому является безопасной для основания сооружения и достоверной. Таким образом, можно сделать следующие выводы.

1. В данной статье получена теоретическая зависимость для определения первой критической нагрузки на зернистую среду основания, представленную пластичной супесью. Эта теоретическая зависимость подтверждена практическими данными, полученными в ходе выполнения инженерных изысканий в городе Тихвин на реальной строительной площадке, что доказывает возможность применения теории механики зернистых сред в строительстве.
2. Показана применимость теории зернистых сред в механике грунтов не только для крупнообломочных и песчаных грунтов, но и для глинистых, в частности, для пластичной супеси.
3. Необходимы дальнейшие исследования в данном направлении на всем спектре грунтов и возрождение отечественной школы теории зернистых сред И.И. Кандаурова в области механики грунтов. Определенные шаги для реализации этих планов в настоящее время предпринимаются в СПбГПУ [17].

Литература

1. Маслов Н.Н. Основы инженерной геологии и механики грунтов. М.: Высшая школа, 1982. 511 с.
2. Litwiniszyn J. Stochastic methods in mechanics of granular bodies. Wien: Springer, 1974. 312 p.
3. Муллер Р.А. Вопросы проектирования и защиты зданий и сооружений от влияния горных выработок. М.: Центргипрошахт, 1961. С. 37-60.
4. Кандауров И.И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. Л.: Стройиздат, 1966. 319 с.
5. Кандауров И.И. Механика зернистых сред и ее применение в строительстве. Л.: Стройиздат, 1988. 280 с.
6. Матвеев А.В. Применение механики зернистых сред в прикладных задачах геомеханики. Л.: НИОТОН, 1991. С. 114 – 137.
7. Матвеев А.В. Начальный и конечный коэффициенты распределительной способности зернистой среды // Транспортное строительство. 1991. №5. С. 17–19.
8. Brzakala W. On propagation of shear stress in Kandaurov's granular medium // Bulletin of the Polish Academy of sciences. Technical sciences. 1988. Vol. 36. №7-9. Pp. 407-413.
9. Matysiak S.J. Distribution of stresses in the Kandaurov granular solid due to a rigid puuch // Studia geotechnical et mechanica. 1984. Vol. 6. №4. Pp. 3–9.
10. Matysiak S.J., Pusz P. Axisymmetric Boussinesq problem for granular half-space // Bulletin of the Polish Academy of sciences. Technical sciences. 1985. Vol. 33. №7-8. Pp. 351–358.
11. Yarr M.E. Mechanics ob particulate media: a probiemisting approach. New York: 1977. 543 p.
12. Заяц О.И., Незлобин А.Н., Череменинский В.Г., Доброва Н.М. Плоская задача о сдвигении комбинированной зернисто-упругой среды под действием поверхностных и объемных сил. Л., 1990. Депонировано 04.10.90 г. в ВИНТИ, №52-53 – В90. 102 с.
13. Nezlobin A.N. Displacements of a surface covering a half of a space filled with Kandaurov standard linear medium under a band load // Proceedings of SPIE. 2003. Vol. 5400. Pp. 230 – 232.
14. Zayats O.I. Dynamical analysis of subsidence trough volume for granular half-space and layer // Proceedings of SPIE. 2003. Vol. 5400. Pp. 200 – 229.
15. Бугров А.К. Механика грунтов: Учебное пособие. СПб.:Изд-во Политехн. ун-та, 2011. 307 с.
16. Цытович Н. А. Механика грунтов (краткий курс). М.: Высшая Школа, 2011. 272 с.
17. Заяц О.И., Баданин А.Н., Кротов А.В. Проблемы применения теории зернистых сред в строительстве // Строительство уникальных зданий и сооружений. 2012. №1. С. 22 – 27.

**Андрей Николаевич Баданин, Санкт-Петербург, Россия*

Тел. моб.: +7(921)659-98-76, эл. почта: chinnab@mail.ru

© Баданин А.Н., Бугров А.К., Кротов А.В., 2012

Баданин А.Н., Бугров А.К., Кротов А.В. Обоснование первой критической нагрузки на зернистую среду супесчаного основания

doi: 10.5862/MCE.35.4

The determination of the first critical load on particulate medium of sandy loam foundation

A.N. Badanin, A.K. Bugrov,

Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia;

A.V. Krotov,

CJSC "EUROMONOLIT", Saint-Petersburg, Russia

+7(921) 659-98-76; e-mail: chinnab@mail.ru

Key words

geomechanics; theory of soil mechanics; mechanics of particulate media

Abstract

The article deals with application problems of the mechanics of particulate media in construction.

The main body of the article is devoted the contribution of foreign and Russian scientists to the theory of mechanics of granular environments, first of all, of the author of this theory. A theoretical substantiation of definition of the first critical load on the foundation according to the mechanics of particulate media theory by I.I. Kandaurov is presented.

Further comparison of results of full-scale ground tests on a real building site and calculations by the offered theoretical substantiation is executed. The comparison results show the possibility of application of the mechanics of particulate media on foundations' design.

At the end of the article the proposal on continuation of research in this direction and revival of the domestic school of the I.I. Kandaurov theory of particulate media is stated.

References

1. Maslov N.N. *Osnovy inzhenernoy geologii i mekhaniki gruntov* [Bases of engineering geology and mechanics of grounds]. Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 511 p. (rus)
2. Litwinskiy J. *Stochastic methods in mechanics of granular bodies*. Wien: Springer, 1974. 312 p.
3. Muller R. A. *Voprosy proyektirovaniya i zashchity zdaniy i sooruzheniy ot vliyaniya gornyx vyrabotok* [Questions of designing and protection of buildings and constructions from influence of mine working]. Moscow: Tsentrgeproshakht, 1961. Pp. 37-60. (rus)
4. Kandaurov I.I. *Mekhanika zernistykh sred i yeye primeneniye v stroitelstve* [Mechanics of granular environments and its application in building]. Leningrad: Stroyizdat, 1966. 319 p. (rus)
5. Kandaurov I.I. *Mekhanika zernistykh sred i yeye primeneniye v stroitelstve* [Mechanics of granular environments and its application in building]. – Leningrad: Stroyizdat, 1988. 280 p. (rus)
6. Matveev A.V. *Primeneniye mekhaniki zernistykh sred v prikladnykh zadachakh geomekhanik* [Application of mechanics of granular environments in applied problems of geomechanics]. Leningrad: NIOTON, 1991. Pp. 114 - 137. (rus)
7. Matveev A.V. *Transportnoye stroitelstvo*. 1991. No. 5. Pp. 17 - 19. (rus)
8. Brzakala W. On propagation of shear stress in Kandaurov's granular medium. *Bulletin of the Polish Academy of sciences. Technical sciences*. 1988. Vol. 36. No. 7/9. Pp. 407-413.
9. Matysiak S.J. Distribution of stresses in the Kandaurov granular solid due to a rigid puuch. *Studia geotechnical et mechanica*. 1984. Vol. 6. No. 4. Pp. 3 - 9.
10. Matysiak S.J., Pusz P. Axisymmetric Boussinesq problem for granular half-space. *Bulletin of the Polish Academy of sciences. Technical sciences*. 1985. Vol. 33. No.7/8. Pp. 351 - 358.
11. Harr M.E. *Mechanics of particulate media: a probabilistic approach*. New York: 1977. 543 p.
12. Zayats O.I., Nezlobin A.N., Cheremensky V.G., Dobrova N.M. *Ploskaya zadacha o sdvizhenii kombinirovannoy zernisto-uprugoy sredy pod deystviyem poverkhnostnykh i obyemnykh sil* [A plane problem about displacement of granular-elastic environment under the influence of surface and volume forces]. Leningrad, 1990. Deposited 04.10.90 in VINITI. No. 52-53. V90.. 102 p. (rus)

13. Nezlobin A.N. Displacements of a surface covering a half of a space filled with Kandaurov standard linear medium under a band load. *Proceedings of SPIE*. 2003. Vol. 5400. Pp. 230 - 232.
14. Zayats O.I. Dynamical analysis of subsidence trough volume for granular half-space and layer. *Proceedings of SPIE*. 2003. Vol. 5400. Pp. 200 - 229.
15. Bugrov A.K. *Mekhanika gruntov: Uchebnoye posobiye* [Soil Mechanics: study guide]. Saint-Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2011. 307 p.
16. Tsytovich N.A. *Mekhanika gruntov (kratkiy kurs)* [Soil Mechanics (short course)]. Moscow: Vysshaya Shkola, 2011. 272 p. (rus)
17. Zayats O.I., Badanin A.N., Krotov A.V. *Stroitelstvo unikalnykh zdaniy i sooruzheniy*. 2012. No. 1. Pp. 22 - 27. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 29-34