Математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учётом различных свойств материалов

К.т.н. В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Ключевые слова: оболочки переменной толщины; ребристые оболочки; ортотропия; линейная и нелинейная упругость; вязкоупругость; поперечные сдвиги; полные углы сдвигов; переменная жесткость; сдвиговая и крутильная жесткости ребер; функционалы полной энергии деформации оболочек

Введение

Оболочки как элементы разного рода конструкций широко применяются в различных областях техники и строительства. Тонкостенные элементы современных конструкций, представляющие собой оболочки, предназначены для работы под воздействием механических нагрузок, которые могут быть как статическими, так и динамическими.

Известно, что тонкие оболочки могут допускать прогибы, соизмеримые с их толщиной (даже под воздействием нагрузок, далёких от критических значений). Для придания в нужных местах большей жёсткости профиль тонких оболочек может иметь плавные утолщения. С целью повышения жёсткости тонкостенная часть оболочки может быть подкреплена дискретно расположенными рёбрами. В обоих случаях существенно повышается несущая способность конструкции при незначительном увеличении её массы.

Таким образом, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной толщины. В зависимости от характера изменения толщины будем различать оболочки гладко-переменной и, соответственно, ступенчато-переменной толщины (ребристые оболочки).

Расчёты на прочность, устойчивость и колебания оболочечных конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций переменной толщины при котором проявляются геометрическая нелинейность, поперечные сдвиги, нелинейная упругость (пластичность, или, точнее, упругопластичность), ползучесть (вязкоупругость) и ортотропия материалов, а также переменность профиля исследовано недостаточно. Причины этого заключаются в сложности совместного учёта всех упомянутых факторов и необходимости решения громоздких нелинейных краевых задач.

Физические основы теории упругости изложены в энциклопедическом курсе Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [1]. Прикладные аспекты теории упругости, пластичности и ползучести обстоятельно освещены в трудах Н.И. Безухова [2] и Н.Н. Малинина [3]. Анализ современного состояния теории оболочек, формулировка основополагающих принципов и построение модели упругих оболочек постоянной толщины приводится в весьма содержательной работе П.А. Жилина [4]. Современное состояние теории ребристых оболочек отражено в работах В.В. Карпова [5, 6], а также зарубежных учёных И. Бискова, Дж. Хансена, Б. Чробота, С. Фишера, С. Берта, В. Койтера, Ю. Джиунченга, Р. Лижо, Дж. Маковски, В. Петрашкевича, Х. Стампфа и др. [7-12].

Разработке геометрически нелинейных математических моделей упругих изотропных оболочек (преимущественно пологих) постоянной и переменной толщины посвящены работа В.В. Карпова и др. [5] (в которой использованы результаты исследований В.М. Жгутова [5, с. 8]), а также учебное пособие В.В. Карпова [6]. Однако в этих публикациях практически не рассматриваются оболочки гладко-переменной толщины и не учитывается эффект поперечных сдвигов. Иными словами, рассматриваются модели оболочек постоянной толщины и ребристых, основанные на гипотезе Кирхгофа-Лява.

Надо отметить, что в настоящее время ряд исследователей (Д.О. Астафьев, В.А. Гордон, В.М. Жгутов и др.) склонны считать неверной гипотезу Кирхгофа-Лява (гипотезу прямой нормали) для оболочки, подкреплённой рёбрами (массивными кольцами). Как показано и самим В.В. Карповым [5], поперечные сдвиги могут значительно влиять на напряжённо-деформированное состояние и устойчивость изотропных оболочек при (линейно) упругом их деформировании; с увеличением же толщины конструкции и жёсткости подкреплений влияние эффекта поперечных сдвигов существенно возрастает. При больших перемещениях влияние поперечных сдвигов резко возрастает.

В ходе вычислительных экспериментов, проведённых В.М. Жгутовым, установлено, что в условиях нелинейной упругости или ползучести материала влияние поперечных сдвигов на напряжённо-деформированной состояние и устойчивость оболочек ещё более усиливается [13].

Геометрическая нелинейность в пособиях [5,6] описывается с помощью квадратичных членов от угловых перемещений в главных нормальных сечениях оболочки, характеризующих одновременно и сдвиги в этих плоскостях, что, очевидно, плохо согласуется с гипотезой Кирхгофа-Лява. По этой причине в задачах динамики при использовании гипотезы Кирхгофа-Лява возникают, как показано в работе В.М. Жгутова [14], некоторые математические некорректности, которые устраняются, исходя из физических соображений. Полученную в этом случае вариационным методом начально-краевую задачу В.М. Жгутов подвергнул корректировке [14]. В работе [14] показано также, что при учёте эффекта поперечных сдвигов математических некорректностей не возникает. Позднее такой же вывод сформулировал и В.В. Карпов с А.Ю. Сальниковым [15].

Кроме того, все результаты в работах [5, 6], относящиеся к ребристым оболочкам, получены с использованием функции H, описывающей дискретное расположение рёбер по оболочке, их ширину и высоту, которая в общем случае, как показано В.М. Жгутовым [13, 16], оказывается некорректной и непригодной для вычислений.

В работах В.В. Карпова, Д.А. Барановой, Р.Т. Беркалиева и Т.В. Рябиковой [17 - 19] предпринята попытка создания теории ребристых оболочек «в единой системе координат» (на отсчётной поверхности оболочки), отличной от теории, изложенной в работах [5, 6]. Однако данная теория представляется ошибочной, потому что она основана:

1) на использовании «системы координат», которая в действительности таковой не является (введённые в работах [17 - 19] «координаты» не являются взаимно независимыми и оказываются неголономными);

2) на геометрических соотношениях, которые были некорректно выведены с использованием правила дифференцирования сложной функции (известного из курса математического анализа), не подлежащего применению в случае взаимозависимых переменных.

Проектирование и последующее создание легких, но вместе с тем прочных и надежных конструкций, требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчета.

В связи с этим разработка более совершенных математических моделей деформирования оболочек представляется актуальной и важной задачей.

В настоящей статье для задач статики и динамики предложены единые геометрически нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины (как гладко-переменной толщины, так и ребристых), совместно учитывающие поперечные сдвиги, возможную ортотропию, нелинейную упругость и ползучесть материалов.

В случае ребристых оболочек на основе уточнённой функции H [13, 15] учитывается также дискретность расположения рёбер, их ширина, высота, сдвиговая и крутильная жёсткости (в условиях возможного проявления указанных различных свойств материалов).

Постановка задачи

Рассматриваем оболочки *общего вида*, подразумевая достаточно широкий класс оболочек наиболее важных частных видов: пологие на прямоугольном плане, вращения (сферические, конические, цилиндрические, торообразные и т.д.) и многие другие оболочки.

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчётную поверхность $x_3 = 0$. Координатные линии x_1 и x_2 криволинейной ортогональной системы координат ($-a/2 \le x_1 \le a/2$ и $-b/2 \le x_2 \le b/2$) направляем по линиям кривизны (параллелям и меридианам в случае оболочек вращения), а ось x_3 – по внутренней нормали отсчётной поверхности так, чтобы система координат x_1, x_2, x_3 была правой. (Полагаем, что определённая таким образом сеть координатных линий на отсчётной поверхности обеспечивает гладкость и регулярность её параметризации).

Элементы длин дуг координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 определяем по формулам:

$$dl_1 = H_1 \cdot dx_1,\ dl_2 = H_2 \cdot dx_2,\ dl_3 = H_3 \cdot dx_3 = dx_3,$$

где $H_1 = H_1(x_1, x_2)$, $H_2 = H_2(x_1, x_2)$, $H_3 \equiv 1$ – метрические коэффициенты Лямэ. При этом H_1 и H_2 зависят от вида оболочки. Например: $H_1 \equiv H_2 \equiv 1$ для пологих оболочек и пластин; $H_1 = const$ и $H_2 = H_2(x_1)$ в случае оболочек вращения.

Переменную толщину оболочки $\widetilde{h} = \widetilde{h}(x_1, x_2)$ задаём ограничивающими её гладкими (или ступенчато-гладкими) поверхностями $z_B = z_B(x_1, x_2) \in C^k$ и $z_H = z_H(x_1, x_2) \in C^k$ так, что $\widetilde{h} = z_H - z_B$ и $z_B \le x_3 \le z_H$. (Принадлежность функции $f(x_1, x_2)$ классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка $k \ge 1$ включительно; запись $f(x_1, x_2) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов). Полагаем, что векторы (ковекторы) градиентов $\overrightarrow{\nabla z_B}$ и $\overrightarrow{\nabla z_H}$ отличны от нуля и коллинеарны $\left(rang \begin{bmatrix} \partial z_B / \partial x_1 & \partial z_B / \partial x_2 \\ \partial z_H / \partial x_1 & \partial z_H / \partial x_2 \end{bmatrix} = 1 \right)$ в любой точке поверхности $x_3 = 0$.

Пусть $K_1 = K_1(x_1, x_2)$ и $K_2 = K_2(x_1, x_2)$ – главные кривизны отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки в направлениях x_1 и x_2 соответственно. Для любой точки отсчётной поверхности оболочки (как правило, не являющейся точкой уплощения) хотя бы одно из значений K_1 и K_2 отлично от нуля: $(K_1, K_2) \ne (0{,}0)$. В случае точки уплощения (редком в теории оболочек) $(K_1, K_2) = (0{,}0)$. Для пластин $K_1 \equiv K_2 \equiv 0$.

По определению главные радиусы кривизны отсчётной поверхности оболочки равны $R_1 = R_1(x_1, x_2) = \dfrac{1}{K_1}$ и $R_2 = R_1(x_1, x_2) = \dfrac{1}{K_2}$. Случаям $K_1 = 0 \vee K_2 = 0$ отвечают «бесконечно большие» значения $R_1 = \infty \vee R_2 = \infty$. Здесь $\vee$ – оператор дизъюнкции предложений (логическое «или»).

Оболочки считаем *тонкими*, так что для любой точки отсчётной поверхности выполняется условие:

$$\Delta \equiv \max\left\{ \frac{\widetilde{h}}{R}; \frac{\widetilde{h}}{l} \right\} < \frac{1}{20},$$

где $R = \min(R_1, R_2)$ – наименьший из главных радиусов кривизны отсчётной поверхности данной оболочки в рассматриваемой точке; $l = \min(l_1, l_2)$ – наименьшая из длин l_1 и l_2 координатных линий x_1 и x_2, проведённых в данной точке ($l_1 = \int\limits_{-a/2}^{a/2} H_1 \cdot dx_1$ и $l_2 = \int\limits_{-b/2}^{b/2} H_2 \cdot dx_2$).

Как известно, область возможного применения теории тонких оболочек весьма велика. При рассмотрении тонких оболочек всеми величинами, имеющими порядок малости $\widetilde{h}/R$ (и выше), пренебрегают.

В случае пластин имеем $\Delta = \frac{\tilde{h}}{l}$ (в силу очевидного равенства $\frac{\tilde{h}}{R} = 0$), где l – наименьший из размеров $l_1 = a$ и $l_2 = b$ пластины в плане.

В случае ребристой оболочки за отсчётную поверхность $x_3 = 0$ принимаем срединную поверхность обшивки толщиной h. Рёбра задаем с помощью ступенчато-гладкой функции $H = H(x_1, x_2)$, характеризующей распределение рёбер по оболочке, их конечную ширину и высоту [13, 16]:

$$H(x_1,x_2) \equiv \sum_{j=1}^{M} h_j^{(2)} \bar{\delta}(x_1 - x_1^j) + \sum_{i=1}^{N} h_i^{(1)} \bar{\delta}(x_2 - x_2^i) - \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} h_{ij} \bar{\delta}(x_1 - x_1^j) \bar{\delta}(x_2 - x_2^i), \tag{1}$$

где $h_i^{(1)}$, $1 \le i \le N$ и $h_j^{(2)}$, $1 \le j \le M$ – высоты рёбер, подкрепляющих оболочку в направлениях координатных линий x_1 и x_2 соответственно;

N и M - количества (числа) рёбер в направлениях x_1 и x_2 соответственно;

$h_{ij} \equiv \min\left(h_i^{(1)}, h_j^{(2)}\right)$ – высота фигуры, получающейся при пересечении i- го ребра в направлении x_1 и j- го ребра в направлении x_2;

$\bar{\delta}(x_1 - x_1^j)$ и $\bar{\delta}(x_2 - x_2^i)$ – единичные столбчатые функции, равные по определению единице в местах присоединения рёбер и нулю – вне таких мест.

При этом полагается, что

- ширина i-го ребра в направлении x_1 равна $r_i^{(1)} = d_i - c_i$ (здесь $c_i = x_2^i - \frac{r_i^{(1)}}{2}$ и $d_i = x_2^i + \frac{r_i^{(1)}}{2}$, где x_2^i – ордината осевой линии прикрепления i- го ребра);
- ширина j-го ребра в направления x_2 равна $r_j^{(2)} = b_j - a_j$ (здесь $a_j = x_1^j - \frac{r_j^{(2)}}{2}$ и $b_j = x_1^j + \frac{r_j^{(2)}}{2}$, где x_1^j – абсцисса осевой линии прикрепления j- го ребра),

поэтому для единичных столбчатых функций можно записать:

$$\bar{\delta}(x_1 - x_1^j) \equiv \begin{cases} 1 & \text{, если } a_j \le x_1 \le b_j, \\ 0 & \text{при любом другом } x_1; \end{cases}$$

$$\bar{\delta}(x_2 - x_2^i) \equiv \begin{cases} 1 & \text{, если } c_j \le x_2 \le d_j, \\ 0 & \text{при любом другом } x_2. \end{cases}$$

Таким образом, толщина ребристой оболочки равна $\tilde{h} = h + H$, причем $z_B = -h/2$ и $z_H = h/2 + H$.

Отметим, что в формуле (1) высоты рёбер могут быть как постоянными ($h_i^{(1)} = const$ и $h_j^{(2)} = const$), так и переменными величинами: $h_i^{(1)} = h_i^{(1)}(x_1, x_2^i)$ и $h_j^{(2)} = h_j^{(2)}(x_1^j, x_2)$, где $x_2^i = const^i$ $(1 \le i \le N)$, $x_1^j = const^j$ $(1 \le j \le M)$; $-a/2 \le x_1 \le a/2$, $-b/2 \le x_2 \le b/2$.

Считаем, что рассматриваемые оболочки закреплены по контуру определённым способом и находятся под действием механической нагрузки (статической или динамической).

Учитываем совместно геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, переменную жёсткость, а также возможные проявления ортотропии, нелинейной упругости или вязкоупругости материалов. В случае ребристых оболочек учитываем, кроме того, дискретное расположение рёбер, их ширину, высоту, сдвиговую и крутильную жёсткости (в условиях возможного проявления указанных различных свойств материалов).

Математические модели деформирования рассматриваемых оболочек

Известно, что математическая модель деформирования оболочки состоит из геометрических соотношений (связь деформаций и перемещений), физических соотношений (связь напряжений и деформаций), функционала полной энергии деформации оболочки, из условия стационарности (минимума) которого следуют уравнения (устойчивого) равновесия или движения.

Геометрические соотношения

Геометрические соотношения в отсчётной поверхности $x_3 = 0$ оболочки получаются с помощью операции абсолютного (ковариантного) дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_{11} = \frac{Du_1}{\partial l_1} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_1}\right)^2;\ \varepsilon_{22} = \frac{Du_2}{\partial l_2} + \frac{1}{2}\left(\frac{Du_3}{\partial l_2}\right)^2;\ \gamma_{12} = \gamma_{21} = \frac{Du_2}{\partial l_1} + \frac{Du_1}{\partial l_2} + \frac{Du_3}{\partial l_1}\cdot\frac{Du_3}{\partial l_2}, \tag{2}$$

где ε_{11} и ε_{22} – деформации удлинения (сжатия) вдоль координатных линий x_1 и x_2 соответственно;

$\gamma_{12} = \gamma_{21}$ – деформации сдвига в касательной плоскости (dx_1, dx_2);

$u_1 = u_1(x_1, x_2)$, $u_2 = u_2(x_1, x_2)$ и $u_3 = u_3(x_1, x_2)$ – компоненты вектора перемещений (точек отсчётной поверхности) вдоль координатных линий x_1, x_2 и оси x_3 соответственно;

$\frac{D}{\partial l_\alpha}$, $1 \le \alpha \le 3$ – операторы ковариантного дифференцирования (по направлениям l_α) произвольных полей, в частности: скалярного поля $a = a(x_1, x_2, x_3)$, векторного поля $a_i = a_i(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i \le 3$, поля тензора второго ранга $a_{ik} = a_{ik}(x_1, x_2, x_3)$, $1 \le i, k \le 3$ и т.д.

Операторы ковариантного дифференцирования $\frac{D}{\partial l_\alpha}$ действуют по правилам [20, 21]:

$$a \mapsto \frac{Da}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a}{\partial x_\alpha},$$

$$a_i \mapsto \frac{Da_i}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a_i}{\partial x_\alpha} - \sum_{k=1}^{3} a_k \Gamma_{ik\alpha}$$

и, соответственно,

$$a_{ik} \mapsto \frac{Da_{ik}}{\partial l_\alpha} = \frac{1}{H_\alpha}\cdot\frac{\partial a_{ik}}{\partial x_\alpha} - \sum_{l=1}^{3}(a_{lk}\Gamma_{il\alpha} + a_{il}\Gamma_{kl\alpha}),$$

где $\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{ik\alpha}(x_1, x_2, x_3)$ – символы Кристоффеля (1-го рода), $1 \le i, k, \alpha \le 3$.

Как известно, символы Кристоффеля симметричны по крайним индексам при $k \ne i, k \ne \alpha$ ($\Gamma_{ik\alpha} = \Gamma_{\alpha ki}$) и антисимметричны по первым двум индексам ($\Gamma_{ik\alpha} = -\Gamma_{ki\alpha}$), а потому величины $\Gamma_{ik\alpha}$ с разными значениями индексов равны нулю ($\Gamma_{ik\alpha} = 0$ при $i \ne k, i \ne \alpha, k \ne \alpha$). Это значит, что в ортогональной криволинейной системе координат из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$ ненулевыми могут быть не более 12: $\Gamma_{ikk}=-\Gamma_{kik}$.

При этом $\Gamma_{ikk}=-\Gamma_{kik}=\frac{1}{H_iH_k}\cdot\frac{\partial H_k}{\partial x_i}=\frac{1}{H_i}\cdot\frac{\partial\ln H_k}{\partial x_i}$, а те 12 из 27 величин $\Gamma_{ik\alpha}$, которые в ортогональной криволинейной системе координат могут быть отличными от нуля, имеют вид

$$\Gamma_{122}=-\Gamma_{212}=\frac{1}{H_1H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_1};\ \Gamma_{133}=-\Gamma_{313}=0;\ \Gamma_{211}=-\Gamma_{121}=\frac{1}{H_1H_2}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial x_2};\ \Gamma_{233}=-\Gamma_{323}=0;$$

$$\Gamma_{311}=-\Gamma_{131}=\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial H_1}{\partial x_3}=-K_1;\ \Gamma_{322}=-\Gamma_{232}=\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial H_2}{\partial x_2}=-K_2.$$

Таким образом,

$$\begin{cases}\dfrac{Du_1}{\partial l_1}=\dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_2-K_1\cdot u_3; & \dfrac{Du_1}{\partial l_2}=\dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_2;\\ \dfrac{Du_2}{\partial l_1}=\dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_1; & \dfrac{Du_2}{\partial l_2}=\dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_1-K_2\cdot u_3;\\ \dfrac{Du_3}{\partial l_1}=\dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}+K_1\cdot u_1; & \dfrac{Du_3}{\partial l_2}=\dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}+K_2\cdot u_2.\end{cases}\tag{3}$$

Введём обозначения:

$$\Theta_1=\Theta_1(x_1,x_2)\equiv\frac{Du_3}{\partial l_1}=\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+K_1\cdot u_1;\ \Theta_2=\Theta_2(x_1,x_2)\equiv\frac{Du_3}{\partial l_2}=\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+K_2\cdot u_2.\tag{4}$$

Тогда с учётом выражений (3) и (4) геометрические соотношения (2) принимают вид:

$$\begin{cases}\varepsilon_{11}=\dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_2-K_1\cdot u_3+\dfrac{1}{2}\Theta_1^2;\\ \varepsilon_{22}=\dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_1-K_2\cdot u_3+\dfrac{1}{2}\Theta_2^2;\\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=\dfrac{1}{H_1}\cdot\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\cdot u_1+\dfrac{1}{H_2}\cdot\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}+\dfrac{1}{H_1H_2}\cdot\dfrac{\partial H_2}{\partial x_1}\cdot u_2+\Theta_1\cdot\Theta_2.\end{cases}\tag{5}$$

В ряде случаев можно полагать, что в процессе деформирования

$$\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1}>>K_1\cdot u_1;\ \frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}>>K_2\cdot u_2,$$

а значит,

$$\Theta_1\approx\frac{1}{H_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_1};\ \ \Theta_2\approx\frac{1}{H_2}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}.$$

Для пластин $K_1\equiv K_2\equiv 0$ и $H_1\equiv H_2\equiv 1$ (как было отмечено выше), а потому операторы ковариантного дифференцирования $\frac{D}{\partial l_\alpha}$, $1\le\alpha\le 3$ совпадают с операторами обычного дифференцирования $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$ и геометрические соотношения (2), (5) максимально упрощаются:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2;\ \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2;\ \gamma_{12}=\gamma_{21}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}. \quad (6)$$

В соотношениях (2), (5) и (6) квадратичные члены характеризуют (приближённо) геометрическую нелинейность, которую следует учитывать в случаях, когда поперечные перемещения u_3 (прогибы) соизмеримы с толщиной оболочки $\tilde{h}$.

Подчеркнём, что тензор деформации при этом должен быть мал [1]; практически в нашем случае это означает требование $u_3 << l$ (для любой точки отсчётной поверхности оболочки), т.е. прогибы должны быть малы по сравнению с продольными размерами оболочки.

Примечание. Следует помнить, что использование приближённых квадратичных выражений для деформаций может привести к ошибкам в практических расчётах. Но ошибки эти связаны, как правило, не с приближённостью исходных формул («приближенность» – всегда правило, а не исключение), а с тем, что при составлении уравнений равновесия зачастую «забывают» учитывать члены, обусловленные геометрической нелинейностью (которая квадратичными членами и описывается). В нашем случае, как указано ниже, уравнения равновесия (или движения) могут быть получены из функционала полной энергии деформации оболочки вариационным методом с помощью корректной математической процедуры вывода, что не приведёт к неучёту соответствующих важных членов. Для задач статики уравнения равновесия могут не составляться вообще, поскольку к функционалу полной энергии деформации оболочки могут быть применены «прямые» методы (метод Ритца). В этом случае в полученной системе алгебраических уравнений члены, описывающие геометрическую нелинейность, будут присутствовать.

Разумеется, было бы гораздо лучше осуществлять учёт геометрической нелинейности путём учёта изменения формы деформируемого тела на каждом шаге его нагружения. Но в случае оболочек это привело бы к чрезмерным математическим усложнениям.

Подход к решению геометрически нелинейных задач в теории оболочек, основанный на использовании квадратичных выражений для деформаций применён в работах В.В. Карпова и др. [5, 6]. Такой же подход приведён Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем при изложении теории сильного изгиба тонких пластин в курсе [1].

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам:

$$\gamma_{13}=cf(x_3)\Phi_1;\quad \gamma_{23}=cf(x_3)\Phi_2.$$

Здесь $f(x_3)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{13} и τ_{23} в главных нормальных сечениях оболочки, такая, что $f(z_B)=f(z_H)=0$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int\limits_{z_B}^{z_H} f(x_3)dx_3=1$, $\frac{1}{\tilde{h}}\int\limits_{z_B}^{z_H} f^2(x_3)dx_3=1/c$ (c – константа);

$\Phi_1=\Psi_1+\frac{Du_3}{\partial l_1}$ и $\Phi_2=\Psi_2+\frac{Du_3}{\partial l_2}$ – полные углы сдвигов, где $\Psi_1=tg\psi_1$ и $\Psi_2=tg\psi_2$, причём $\psi_1=\psi_1(x_1,x_2)$ и $\psi_2=\psi_2(x_1,x_2)$ – углы поворота отрезка нормали к отсчётной поверхности в соответствующих главных нормальных сечениях оболочки [19].

В качестве $f(x_3)$ используем квадратичную зависимость [19] (применимую как для оболочек гладко-переменной, так и ступенчато-переменной толщины):

$$f(x_3)=-\frac{6}{\tilde{h}^2}(x_3-z_H)(x_3-z_B)=f_0+f_1x_3+f_2x_3^2,$$

где $f_0=-\frac{6z_Hz_B}{\tilde{h}^2}$; $f_1=\frac{6(z_H+z_B)}{\tilde{h}^2}$ и $f_2=-\frac{6}{\tilde{h}^2}$, и тогда $c=5/6$.

Деформации в слоях $x_3 = const$ вычисляем по формулам [19]:

$$\varepsilon_{11}^{(x3)} = \varepsilon_{11} + x_3 \cdot \mathrm{X}_{11}, \quad \varepsilon_{22}^{(x3)} = \varepsilon_{22} + x_3 \cdot \mathrm{X}_{22}; \quad \gamma_{12}^{(x3)} = \gamma_{12} + x_3 \cdot 2\mathrm{X}_{12},$$

где $\mathrm{X}_{11} \equiv \dfrac{D\Phi_1}{\partial l_1} = \dfrac{1}{H_1}\dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} + \dfrac{1}{H_1 H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_2$;

$$\mathrm{X}_{22} \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_2} = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_1 ;$$

$$2\mathrm{X}_{12} \equiv \frac{D\Phi_2}{\partial l_1} + \frac{D\Phi_1}{\partial l_2} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial x_2}\Phi_1 + \frac{\partial H_2}{\partial x_1}\Phi_2\right),$$

поскольку для перемещений в слоях $x_3 = const$, полагаем:

$$u_1^{(x3)} = u_1 + x_3 \cdot \Phi_1,\ u_2^{(x3)} = u_2 + x_3 \cdot \Phi_2 \text{ и } u_3^{(x3)} = u_3 .$$

Здесь $\mathrm{X}_{ik} \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{D\Phi_k}{\partial l_i} + \dfrac{D\Phi_i}{\partial l_k}\right)$, $1 \le i,k \le 2$ – тензор изменения кривизны и кручения (записанный в явно симметричном виде).

Физические соотношения

Физические соотношения для ортотропных линейно упругих материалов в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид [22 - 24]:

$$\sigma_{11} = G_{11}\left(\varepsilon_{11}^{(x3)} + \mu_2\varepsilon_{22}^{(x3)}\right), \sigma_{22} = G_{22}\left(\varepsilon_{22}^{(x3)} + \mu_1\varepsilon_{11}^{(x3)}\right), \tau_{12} = G_{12}\gamma_{12}^{(x3)}; \tau_{13} = G_{13}\gamma_{13}, \tau_{23} = G_{23}\gamma_{23}. \tag{7}$$

Здесь $G_{11} = E_1/(1-\mu_1\mu_2)$, $G_{22} = E_2/(1-\mu_1\mu_2)$; G_{12}, G_{13}, G_{23} – модули сдвига, где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – продольные модули Юнга и коэффициенты Пуассона $(\mu_1 E_2 = \mu_2 E_1)$.

Для изотропных линейно упругих материалов физические соотношения следуют из формул (7), если положить $E_1 = E_2 = E$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ и, следовательно, $G_{11} = G_{22} = E/(1-\mu^2)$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = E/2(1+\mu)$.

В случае нелинейно упругого изотропного материала физические соотношения в соответствии с деформационной теорией пластичности принимаем в виде [23, 24]:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{\mathrm{E}} - \sigma_{11}^{\mathrm{P}},\ \sigma_{22} = \sigma_{22}^{\mathrm{E}} - \sigma_{22}^{\mathrm{P}},\ \tau_{12} = \tau_{12}^{\mathrm{E}} - \tau_{12}^{\mathrm{P}};\ \tau_{13} = \tau_{13}^{\mathrm{E}} - \tau_{13}^{\mathrm{P}},\ \tau_{23} = \tau_{23}^{\mathrm{E}} - \tau_{23}^{\mathrm{P}}, \tag{8}$$

где линейно упругие составляющие тензора напряжений (отмечены индексом « E ») определяются по формулам (7) (где $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$), а нелинейно-упругие составляющие (отмечены индексом P) вычисляются с помощью соотношений:

$$\sigma_{11}^{\mathrm{P}} = \omega(\varepsilon_i)\sigma_{11}^{\mathrm{E}},\ \sigma_{22}^{\mathrm{P}} = \omega(\varepsilon_i)\sigma_{22}^{\mathrm{E}};\ \tau_{12}^{\mathrm{P}} = \omega(\varepsilon_i)\tau_{12}^{E},\ \tau_{13}^{\mathrm{P}} = \omega(\varepsilon_i)\tau_{13}^{\mathrm{E}},\ \tau_{23}^{\mathrm{P}} = \omega(\varepsilon_i)\tau_{23}^{\mathrm{E}}.$$

Здесь $\omega(\varepsilon_i)$ – функция А.А. Ильюшина; ε_i – интенсивность деформации.

При учёте вязкоупругости (ползучести) материала физические соотношения в соответствии с теорией упруго-ползучего тела (применимой для полимерных материалов, стареющего и нестареющего бетона) имеют вид:

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{\mathrm{E}} - \sigma_{11}^{\mathrm{C}},\ \sigma_{22} = \sigma_{22}^{\mathrm{E}} - \sigma_{22}^{\mathrm{C}},\ \tau_{12} = \tau_{12}^{\mathrm{E}} - \tau_{12}^{\mathrm{C}};\ \tau_{13} = \tau_{13}^{\mathrm{E}} - \tau_{13}^{\mathrm{C}},\ \tau_{23} = \tau_{23}^{\mathrm{E}} - \tau_{23}^{\mathrm{C}}, \tag{9}$$

где линейно упругие (упруго-мгновенные) составляющие тензора напряжений (отмечены индексом « E ») имеют вид соотношений (7), в которых все константы в общем случае являются функциями времени наблюдения t, а вязкоупругие составляющие (отмечены индексом « C ») вычисляются по формулам:

$$\sigma_{11}^{\mathrm{C}} = R1(t,s)\sigma_{11}^{\mathrm{E}},\ \sigma_{22}^{\mathrm{C}} = R1(t,s)\sigma_{22}^{\mathrm{E}};\ \tau_{12}^{\mathrm{C}} = R2(t,s)\tau_{12}^{E},\ \tau_{13}^{\mathrm{C}} = R2(t,s)\tau_{13}^{\mathrm{E}},\ \tau_{23}^{\mathrm{C}} = R2(t,s)\tau_{23}^{\mathrm{E}}.$$

Здесь $R1(t,s)$ и $R2(t,s)$ – функции влияния при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно, где s - время, предшествующее моменту наблюдения t.

Функционал полной энергии

Функционал полной энергии деформации оболочки на данном отрезке времени $[t_0, t_1]$ для задач динамики имеет вид [25, 26]:

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (K - U + A)dt\,, \tag{10}$$

где K и U – кинетическая и потенциальная энергии оболочки; A – работа внешних сил.

Подчеркнём, что в задачах динамики подлежащие определению функции перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1, Ψ_2 являются не только функциями координат x, y (считающихся неподвижными), но и времени t: $u_1 = u_1(x,y,t)$, $u_2 = u_2(x,y,t)$, $u_3 = u_3(x,y,t)$ и $\Psi_1 = \Psi_1(x,y,t)$, $\Psi_2 = \Psi_2(x,y,t)$.

Для задач статики полная энергия деформации оболочки (функционал Лагранжа) может быть записана в виде [25, 26]:

$$W = U - A\,. \tag{11}$$

В соотношениях (10) и (11):

$$K = \frac{\rho}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(H_1\frac{\partial u_1^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2^{(x3)}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3^{(x3)}}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega\,; \tag{12}$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left(\sigma_{11}\varepsilon_{11}^{(x3)} + \sigma_{22}\varepsilon_{22}^{(x3)} + \tau_{12}\gamma_{12}^{(x3)} + \tau_{13}\gamma_{13}^{(x3)} + \tau_{23}\gamma_{23}^{(x3)}\right)d\Omega\,; \tag{13}$$

$$A = \iint_{S}(P_1u_1 + P_2u_2 + P_3u_3)dS\,. \tag{14}$$

Здесь ρ – плотность материала оболочки $(\rho \approx const)$;

$\Omega = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]\times[z_B, z_H]$ – компакт (замкнутое связное множество) в пространстве (x,y,z);

$S = [-a/2, a/2]\times[-b/2, b/2]$ – компакт на плоскости (x,y);

$d\Omega = dl_1dl_2dx_3 = H_1H_2dx_1dx_2dx_3$ и $dS = dl_1dl_2 = H_1H_2dx_1dx_2$ – элементы объёма и отсчётной поверхности оболочки соответственно;

P_1, P_2 и P_3 – компоненты внешней механической нагрузки в направлениях x_1, x_2 и x_3 соответственно, действующей на единицу площади поверхности оболочки (в задачах статики $P_1 = P_1(x,y)$, $P_2 = P_2(x,y)$ и $P_3 = P_3(x,y)$; в задачах динамики $P_1 = P_1(x,y,t)$, $P_2 = P_2(x,y,t)$ и $P_3 = P_3(x,y,t)$).

Проинтегрируем по переменной x_3 выражения (12) и (13) в функционалах (10) и (11).

В результате будем иметь соответственно:

$$K = \frac{\rho}{2}\iint_S \left\{ A_0\left[\left(H_1\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2\right] + \right.$$

$$\left. + 2A_1\left[H_1^2\frac{\partial u_1}{\partial t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + H_2^2\frac{\partial u_2}{\partial t}\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right] + A_2\left[\left(H_1\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(H_2\frac{\partial \Phi_2}{\partial t}\right)^2\right]\right\}dS \qquad (16)$$

и

$$U = \frac{1}{2}\iint_S \left[N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\gamma_{12} + M_{11}\mathrm{X}_{11} + 2M_{12}\mathrm{X}_{12} + M_{22}\mathrm{X}_{22} + Q_{13}\Phi_1 + Q_{23}\Phi_2\right]dS\,, \qquad (17)$$

где $A_0 = \int_{z_B}^{z_H} dx_3 = \widetilde{h}$, $A_1 = \int_{z_B}^{z_H} x_3 dx_3 = \widetilde{h}\cdot\frac{z_H + z_B}{2}$ и $A_2 = \int_{z_B}^{z_H} x_3^2 dx_3 = \widetilde{h}\cdot\frac{z_H^2 + z_H z_B + z_B^2}{3}$ – погонные площадь, статический момент и момент инерции данного главного нормального сечения оболочки;

$N_{11} = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{11} dx_3$ и $N_{22} = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{11} dx_3$ – погонные усилия растяжения (сжатия) в направлениях x_1 и x_2;

$N_{12} = \int_{z_B}^{z_H} \tau_{12} dx_3$ – погонное сдвиговое усилие в касательной плоскости (dx_1, dx_2);

$M_{11} = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{11} x_3 dx_3$ и $M_{22} = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{22} x_3 dx_3$ – погонные изгибающие моменты в направлениях x_1 и x_2;

$M_{12} = \int_{z_B}^{z_H} \tau_{12} x_3 dx_3$ – погонный крутящий момент в касательной плоскости (dx_1, dx_2);

$Q_{13} = \int_{z_B}^{z_H} \tau_{13} dx_3$ и $Q_{23} = \int_{z_B}^{z_H} \tau_{23} dx_3$ – погонные поперечные (перерезывающие) усилия в главных нормальных сечениях оболочки соответственно.

Заметим, что в случае симметричной по толщине оболочки $\left(z_B = -z_H\right)$ величины $A_{m-1} = \int_{z_B}^{z_H} z^{m-1} dz = 0$, если $m-1$ нечётно (сравнимо с 1 по модулю 2: $m-1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$), $1 \le m \le 3$ и соотношения для внутренних силовых факторов существенно упрощаются. Поэтому целесообразно (если при этом не нарушается условие гладкости отсчётной поверхности, как, например, в случае ребристых оболочек) ввести новую отсчётную поверхность $z_0 = z_0(x, y)$ так, чтобы $A_{m-1} = 0$, если $m-1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$. Положение поверхности z_0 можно определить из условия $z_0 = \left(z_H + z_B\right)/2$ [22] и тогда $A_{m-1} = \int_{z_B^*}^{z_H^*} \left(z^*\right)^{m-1} dz^* = 0$, где $m-1 \equiv 1(\mathrm{mod}\,2)$, $z^* = z - z_0$, $z_H^* = z_H - z_0$, $z_B^* = z_B - z_0$.

Компоненты тензора напряжений σ_{11}, σ_{22}, τ_{12}, τ_{13} и τ_{23} в выражениях для внутренних силовых факторов, действующих в оболочке (усилий N_{11}, N_{22}, N_{12}, Q_{13}, Q_{23} и моментов M_{11}, M_{22}, M_{12}) вычисляем по формулам (7), (8) или (9) в зависимости от проявленных свойств материала (ортотропия, упругость, нелинейная упругость, вязкоупругость).

Уравнения движения или **равновесия** оболочки могут быть получены, исходя из фундаментальных *принципов наименьшего действия* (в форме Гамильтона-Остроградского) или *минимума потенциальной энергии* (в форме Лагранжа) [25, 26], в соответствии с которыми:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} \left(K - U + A \right) dt = 0 \qquad (18)$$

или, соответственно,

$$\delta W = \delta (U - A) = 0 ,$$

где δ – символ вариации.

Таким образом, построены единые математические модели деформирования оболочек переменной толщины с учётом различных свойств материалов (для задач статики и динамики).

Применение этих моделей позволяет совместно учитывать геометрическую нелинейность, поперечные сдвиги, возможную ортотропию, нелинейную упругость и ползучесть материалов. В случае ребристых оболочек учитывается также дискретность расположения рёбер, их ширина, высота, сдвиговая и крутильная жёсткости (в условиях возможного проявления указанных различных свойств материалов).

Начальные и граничные условия (отвечающие способу закрепления оболочки по контуру) предполагаются заданными.

В задачах статики для поиска минимума функционала (11), записанного с учётом выражений (15)–(17), может быть эффективно применён метод Ритца при разложении искомых функций перемещений u_1, u_2, u_3 и углов Ψ_1 и Ψ_2 в ряды.

В задачах динамики для решения системы уравнений движения оболочки, эквивалентной вариационному уравнению (18), целесообразно последовательно применить методы Власова-Канторовича и Рунге-Кутта.

Если априори считать функции перемещений u_1, u_2, u_3 компонентами потенциального вектора (что, очевидно, почти всегда выполняется, поскольку возможные локальные повороты, нарушающие симметрию деформаций сдвига, не искажают картину деформированного и напряжённого состояния оболочки), то в этом случае мы имеем, что

$$\frac{Du_1}{\partial l_2} = \frac{Du_2}{\partial l_1}, \quad \Psi_1 = \frac{Du_1}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_1}, \quad \Psi_2 = \frac{Du_2}{\partial x_3} = \frac{Du_3}{\partial l_2},$$

а, значит, полные углы сдвигов:

$$\Phi_1 = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \quad \Phi_2 = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}$$

и, кроме того,

$$\mathrm{X}_{11} = 2\frac{Du_3}{\partial l_1}, \quad \mathrm{X}_{22} = 2\frac{Du_3}{\partial l_2}, \quad 2\mathrm{X}_{12} = 2\frac{D^2 u_3}{\partial l_1 \partial l_2}.$$

Таким образом, полученные математические модели существенно упрощаются.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости. М. : Физматлит, 2007. 264 с.
2. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1968. 512 с.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1975. 399 с.
4. Жилин П. А. Прикладная механика. Основы теории оболочек. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2006. 167 с.
5. Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования. М.: АСВ; СПб.: СПбГАСУ, 2002. 420 с.
6. Карпов В. В. Математическое моделирование, алгоритмы исследования модели, вычислительный эксперимент в теории оболочек. СПб.: СПбГАСУ, 2006. 330 с.
7. Byskov E., Hansen J. C. Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction // Journal of structural mechanics. 1980. № 2. Pp. 205–224.
8. Chrobot B. Mathematical models of ribbed shells // Studia Geotechnica et Mechanica. 1982. Vol. IV, №3-4. Pp. 55–68.
9. Fisher C. A., Berit C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers // Trans. ASME. Ser. E. 1973. Vol. 40, № 3. Pp. 736–740.
10. Koiter W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures // WTHD Rep. 1976. № 590.
11. Wu Jiuncheng, Pan Lizhou. Nonlinear theory of multilayer sandwich shells and its application // Applied Math and Mechanics. 1997. Vol. 18, № 1. Pp. 19 -27.
12. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells // Archives of Mechanics. 1998. Vol. 50, № 3. Pp. 483-495.
13. Жгутов В. М. Ответ профессору Карпову, Владимиру Васильевичу (о научном приоритете в методе конструктивной анизотропии для ребристых оболочек и на функционал, описывающий ползучесть их материала) // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 3. С. 75 – 80.
14. Жгутов В. М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: дисс. канд. техн. наук. СПб. , 2004. 177 с.
15. Карпов В. В., Сальников А. Ю. Вариационный метод вывода нелинейных уравнений движения пологих ребристых оболочек // Вестник гражданских инженеров. 2008. № 4. С. 121–124.
16. Жгутов В. М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 8. С. 40 – 46.
17. Карпов В. В., Баранова Д. А., Беркалиев Р. Т. Программный комплекс исследования устойчивости оболочек. СПб. : СПбГАСУ, 2009. 102 с.
18. Карпов В. В. Уравнения равновесия для оболочки вращения для единой системы координат // Вестник гражданских инженеров. 2010. С. 173–179.
19. Карпов В. В., Рябикова Т. В. Оболочки вращения в единой системе координат // Вестник гражданских инженеров. 2010. № 2. С. 44–47.
20. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М. : Наука, 1965. 428 с.
21. Акивис М. А., Гольдберг В. В. Тензорное исчисление. М. : Наука, Физматлит, 1969. 352 с.
22. Жгутов В. М. Геометрически нелинейные математические модели термоупругости оболочек переменной толщины // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2011. № 4. С. 46 – 56.
23. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. С. 110 – 131.
24. Жгутов В. М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учёте различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. 2007. № 4. С. 20 – 23.
25. Компанеец А. С. Теоретическая физика. М. : Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1957. 564 с.
26. Жилин П. А. Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики. СПб. : Изд-во СПбГТУ. 339 с.

Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург, Россия
Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru

doi: 10.5862/MCE.27.9

Mathematical deformation models of variable thickness shells with calculation of different materials` behaviour

V.M. Zhgoutov
"Architectural and Engineering Company Kitezh" LTd.
+7(812)378-20-83; e-mail:abc_kitezh@mail.ru

Key words

variable thickness shells; linear and nonlinear elasticity; viscoelasticity, transversal movements; full shear angles; variable rigidity; shear and torsion rib rigidity; full deformation energy functional of shells

Abstract

Shells as elements of various structures are widely used in different fields of engineering and construction. Thin-walled elements of modern structures that represent shells designed to work under the influence of mechanical stress, which can be either static or dynamic. Calculations of strength, stability and vibrations of shell structures have an important role in the design of modern devices, machines and constructions.

Profile of shell can have smooth thickening to increase rigidity in some areas. There is also a variant of a thin-walled part of the shell strengthening by discretely spaced ribs.In both cases, carrying force of structures significantly increases with a slight increase of its mass.

In this article geometrically nonlinear mathematical deformation models of shells with variable thickness, in particular ribbed shells, (for static and dynamic problems) are proposed. Different material properties are taken into account (orthotropism, linear and nonlinear elasticity, viscoelasticity and creeping), as well as transversal movements, variable rigidity of ribbed shells besides its finite widths and height of ribs, shear and torsion rigidity.

References

1. Landau L. D., Lifshits Ye. M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII. Teoriya uprugosti* [Theoretical Physics. Vol. VII. Theory of elasticity]. Moscow: FIZMATLIT, 2007. 264 p. (rus)
2. Bezukhov N. I. *Osnovy teorii uprugosti, plastichnosti i polzuchesti* [Fundamentals of the theory of elasticity, plasticity and creep]. Moscow: Vysshaya shkola, 1968. 512 p. (rus)
3. Malinin N. N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti* [Applied theory of plasticity and creep]. Moscow: Mashinostroyeniye, 1975. 399 p. (rus)
4. Zhilin P. A. *Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek* [Applied Mechanics. Fundamentals of the theory of shells]. Saint-Petersburg: Izd-vo Politekhn. un-ta, 2006. 167 p. (rus)
5. Karpov V. V., Ignatyev O. V., Salnikov A. Yu. *Nelineynyye matematicheskiye modeli deformirovaniya obolochek peremennoy tolshchiny i algoritmy ikh issledovaniya* [Non-linear mathematical models of variable thickness shells deformation and algorithms for their studies]. Moscow: ASV; Saint-Petersburg: SPbGASU, 2002. 420 p. (rus)
6. Karpov V. V. *Matematicheskoye modelirovaniye, algoritmy issledovaniya modeli, vychislitelnyy eksperiment v teorii obolochek* [Mathematical modeling, algorithms, research models, computer experiment in the theory of shells]. Saint-Petersburg: SPbGASU, 2006. 330 p. (rus)
7. Byskov E., Hansen J. C. Postbuckling and imperfection sensitivity analysis of axially stiffened cylindrical shells with mode interaction. *Journal of structural mechanics*. 1980. No. 2. Pp. 205–224. (rus)
8. Chrobot B. Mathematical models of ribbed shells. *Studia Geotechnica et Mechanica*. 1982. Vol. IV, No. 3–4. Pp. 55–68.
9. Fisher C. A., Berit C. W. Dynamic buckling of an axially compressed cylindrical shells with discrete rings and stringers. *Trans. ASME. Ser. E*. 1973. Vol. 40, No. 3. Pp. 736–740.
10. Koiter W. T. General theory of mode interaction in stiffened plate and shell structures. *WTHD Rep*. 1976. No. 590.
11. Wu Jiuncheng, Pan Lizhou. Nonlinear theory of multilayer sandwich shells and its application. *Applied Math and Mechanics*. 1997. Vol. 18, No. 1. Pp. 19 -27.

12. Makowski J., Pietraszkiewicz W., Stumpf H. On the general form of jump conditions for thin irregular shells. *Archives of Mechanics*. 1998. Vol. 50, No. 3. Pp. 483-495.
13. Zhgutov V. M. *Magazine of civil engineering*. 2011. No. 3. Pp. 75 - 80. (rus)
14. Zhgutov V. M. *Nelineynyye svobodnyye kolebaniya pologikh obolochek stupenchato-peremennoy tolshchiny: diss. kand. tekhn. nauk* [Nonlinear free vibrations of shallow stepwise-variable thickness shells: diss. Candidate. Technical. Science]. Saint-Petersburg: 2004. 177 p. (rus)
15. Zhgutov V. M. *Magazine of civil engineering*. 2009. No. 8. Pp. 40 - 46. (rus)
16. Karpov V. V., Baranova D. A., Berkaliyev R. T. *Programmnyy kompleks issledovaniya ustoychivosti obolochek* [The program complex for studying stability of shells]. Saint-Petersburg: SPbGASU, 2009. 102 p. (rus)
17. Kochin N. Ye. *Vektornoye ischisleniye i nachala tenzornogo ischisleniya* [Vector Calculus and the beginning of the tensor calculus]. Moscow: Nauka, 1965. 428 p. (rus)
18. Akivis M. A., Goldberg V. V. *Tenzornoye ischisleniye* [Tensor calculus]. Moscow: Nauka, Fizmatlit, 1969. 352 p. (rus)
19. Zhgutov V. M. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta* [Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnical University]. 2011. No. 4. Pp. 46 - 56. (rus)
20. Zhgutov V. M. *Problemy prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte: Sbornik dokladov VII Mezhdunarodnoy konferentsii po problemam prochnosti materialov i sooruzheniy na transporte 23-24 aprelya 2008 goda* [Problems of materials and structures strength for transport: Proceedings of the VII International Conference on the strength of materials and structures for transport on 23-24 April 2008]. Saint-Petersburg: Peterburgskiy gosudarstvennyy universitet putey soobshcheniya, 2008. Pp. 110 - 131. (rus)
21. Zhgutov V. M. *Izvestiya Orlovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Proceedings of the Oryol State Technical University]. 2007. No. 4. Pp. 20 - 23. (rus)
22. Kompaneyets A. S. *Teoreticheskaya fizika* [Theoretical physics]. Moscow: Gos. izd-vo tekhn. teor. lit-ry, 1957. 564 p. (rus)
23. Zhilin P. A. *Teoreticheskaya mekhanika. Fundamentalnyye zakony mekhaniki* [Theoretical Mechanics. The fundamental laws of mechanics]. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGTU. 339 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 79-90