

## О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях

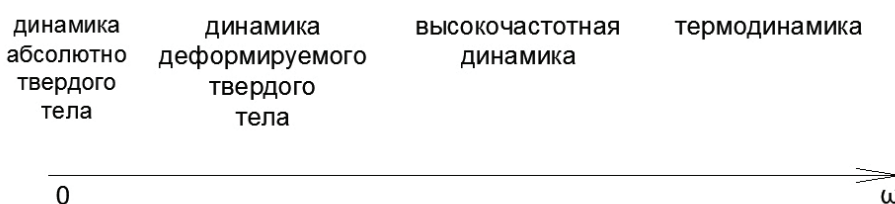
*Аспирант Г.В. Денисов\*;*

*д.т.н., профессор, заведующий кафедрой В.В. Лалин,*

*ФГБОУ ВПО Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

**Ключевые слова:** высокочастотные колебания; сплошной спектр; дискретный спектр; стержень; граничная частота

С колебаниями или колебательными движениями мы встречаемся повсеместно в природе и технике. В соответствии с [1÷3] можно использовать частотные диапазоны, в пределах которых реализуются различные типы колебаний, для классификации динамик (рис. 1).



**Рисунок 1. Схема динамик в зависимости от оперируемых частот**

Исторически, первой была динамика абсолютно твердого тела (И. Ньютон, Л. Эйлер), рассматривающая, по сути, нулевые собственные частоты. Динамика деформируемого твердого тела появилась позже (М. Дюамель). Она оперирует областью механических частот, характерных для рассматриваемого тела. Термодинамика также является видом динамики и оперирует с частотами тепловых движений, значительно превышающими частоты механических колебаний.

В работах [1÷3] автор показывает существование высокочастотной динамики, являющейся высокочастотным случаем классической динамики деформируемого твердого тела и низкочастотным – термодинамики. Характерным отличием от классической динамики является оперирование сплошным спектром собственных частот. Показано, что существует некая граничная частота, выше которой конструкция проявляет свойства системы со сплошным спектром. Но теоретический характер работ [1÷3] и последующих [4÷6] с преобладающим математическим изложением и малым количеством примеров делает их практически недоступными для широкого круга инженеров. Цель настоящей статьи – частично восполнить имеющийся пробел, показав на элементарных примерах наличие обозначенной выше частоты с последующей реализацией сплошного спектра, а также возможности использования этого факта при выполнении инженерных расчетов.

В качестве примера будем рассматривать колебания прямолинейных однородных конечных стержней.

Согласно классическому подходу [7], перемещения точек стержней определяются путем наложения перемещений, соответствующих формам собственных колебаний, и колебаний, вызванных возмущающей силой. При этом стержень, как и любое упругое тело, имеет бесконечное множество степеней свободы, так как за возможное перемещение можно принять любое малое перемещение, удовлетворяющее условиям непрерывности, т.е. не вызывающее разрывов в теле. Поэтому любое упругое тело имеет бесконечно большое число форм собственных колебаний. Таким образом, в случае произвольной нестационарной силы для точного определения перемещений теоретически требуется учет всех форм собственных колебаний, что является возможным только для очень ограниченного круга задач.

Рассмотрим с физической точки зрения возможность существования бесконечного спектра собственных колебаний стержней. На рис. 2 приведены две изгибные формы собственных колебаний шарнирно опертого стержня, характеризующиеся длинами волн  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . На рис. 3 схематично показаны участки стержня с одинаковой направленностью колебательного движения Денисов Г.В., Лалин В.В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях

(в данном случае вверх или вниз). Из приведенных иллюстраций видно, что по мере уменьшения длины волны, а, соответственно, увеличения частоты колебаний, происходит вырождение участка стержня равной направленности движения в точку. Таким образом, высшие формы представляют собой колебательные движения бесконечно большого количества участков стержня пренебрежительно малой длины, что является математической абстракцией. Так, многие исследователи [7÷10] показывают для большинства конструкций значительный вклад первых форм колебаний с пренебрежительно малой долей последующих.

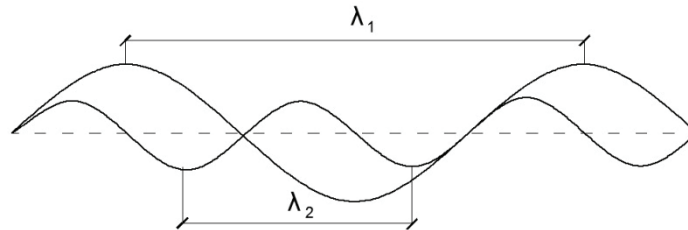


Рисунок 2. Изгибные формы колебаний шарнирно опертого стержня



Рисунок 3. Участки стержня одинаковой направленности колебательного движения в зависимости от длины волны

Далее проанализируем амплитуды колебаний высших форм. Для этого будем рассматривать вынужденные колебания консольного стержня, представляющего элементарную строительную конструкцию, под действием сосредоточенной гармонической нагрузки.

Амплитуда  $n$ -й формы вынужденных продольных колебаний однородного прямолинейного стержня с учетом упруго-вязкого трения имеет вид [11]:

$$A_n = \frac{h_n}{\rho F p_n^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{p_n^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2}}, \quad (1)$$

где  $n$  – номер формы;  $h$  – некая вспомогательная функция, определяемая конкретным законом изменения амплитуд нагрузки в соответствии с формами собственных колебаний;  $\rho$  – плотность материала стержня;  $F$  – площадь поперечного сечения стержня;  $p$  – значения собственных частот;  $\omega$  – значение частоты вынуждающей силы;  $k$  – коэффициент вязкости;  $E$  – модуль упругости материала стержня. Вывод уравнения движения, а также выражения (1), приведены в [11].

Из выражения (1) легко получить выражение амплитуды для частного случая резонансных колебаний при совпадении частоты вынуждающей силы с собственными значениями ( $\omega = p$ ):

$$A_n^* = \frac{h_n E}{\rho F p_n^2 k \omega}. \quad (2)$$

В выражении (2) для наглядности разделено обозначения частот  $\omega$  и  $p$ , хотя  $\omega = p$ .

Сравнивая (1) и (2), отбрасывая общие множители, пренебрегая изменением величины  $h$  и возведя в квадрат обе части, получаем:

$$A_n \leq A_n^* \Leftrightarrow \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2 \leq \left(1 - \frac{\omega^2}{p_n^2}\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2. \quad (3)$$

Далее представим выражения для  $\omega$  в следующем виде:

$$\omega = p_n \pm \Delta p. \quad (4)$$

Денисов Г.В., Лалин В.В. О сплошном спектре колебаний балочных элементов конструкции при высокочастотных воздействиях

В выражении (4) второе слагаемое описывает точность совпадения частоты вынуждающей силы с какой-либо собственной частотой. При этом значения  $\Delta p$  для нерезонансного случая должны удовлетворять условию:

$$0 < \Delta p < (p_{i+1} - p_i). \quad (5)$$

Отметим, что для стержней значение  $\Delta p$  не может превышать некой постоянной величины, независимой от номера собственной формы, так как разность соседних собственных частот постоянна. Это следует из теоретического решения [11, 12].

Преобразуем выражение (3). Используя (4) для первого слагаемого в правой части, после элементарных математических преобразований, получим:

$$A_n \leq A_n^* \Leftrightarrow \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2 \leq \left(1 - \left(1 \pm \frac{\Delta p}{p_n}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{k\omega}{E}\right)^2. \quad (6)$$

Проанализируем данное выражение. Отметим, что первое слагаемое в правой части характеризует отклик стержня на динамическую нагрузку в зависимости от близости вынуждающих и собственных частот. По мере увеличения частоты  $\omega$  при соответствующих высоких значениях  $p_n$  указанное слагаемое в правой части будет стремиться к нулю. Таким образом, значения нерезонансных амплитуд будут стремиться к значениям амплитуд, соответствующих резонансным колебаниям. Это приводит к фактическому исчезновению резонанса как такового при высших формах колебаний и выравниванию графика амплитудно-частотной характеристики с утратой резонансных всплесков.

Следует отметить, что, так как резонансные амплитуды не одинаковы для всех точек стержня и имеют меньшие значения в областях наиболее удаленных от мест приложения нагрузок (или от их максимальных значений), в этих зонах следует ожидать утрату резонансов при более низких частотах, чем в наиболее загруженных областях.

На основании вышесказанного можно заключить, что существует некая граничная частота вынуждающей силы, которая еще может привести к резонансным явлениям. Дальнейшее увеличение частоты приводит только к равномерному уменьшению амплитуды вынужденных колебаний ввиду того, что дискретный спектр собственных частот становится сплошным, и для него теперь характерно слабое изменение амплитуд в достаточно широком диапазоне частот без выраженных максимумов.

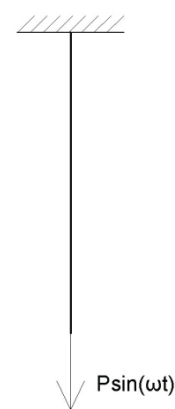
Таким образом, высокочастотные колебания стержня в основном будут определяться статическими характеристиками (деформационными характеристиками материала, длиной, и т.п.) и внешними нагрузками. Динамические характеристики, такие как собственные частоты и моды, по сути, теряют свой физический смысл и не оказывают существенного влияния на колебательное движение, так как не приводят к резонансу.

С другой стороны, для собственных колебаний можно заключить, что следующие после граничной частоты формы колебаний уже не вносят существенного вклада (при использовании какой-либо другой частоты, близкой по порядку к собственной, вклад будет равносильным) и имеют пренебрежительно малые амплитуды.

Следует отметить, что выражения (1) и (2), как показано в [11], в качественном отношении справедливы для крутильных и изгибных колебаний. Это дает право распространить сделанные выше выводы и на указанные типы колебаний.

Напомним, что сделанные выводы не справедливы для произвольной нагрузки, для которой требуется учет конкретного характера нагрузки, описываемой функцией  $h$ , что не является предметом данной работы.

Для подтверждения сделанных выше выводов выполним численные эксперименты в программном комплексе ANSYS подобно исследованиям [13] и с учетом результатов работы [14]. В качестве первого примера будем рассматривать вынужденные продольные колебания стального стержня под действием гармонической нагрузки (рис. 4). При этом частоту вынуждающей силы  $\omega$  будем равномерно увеличивать для определения амплитудно-частотной характеристики стержня.

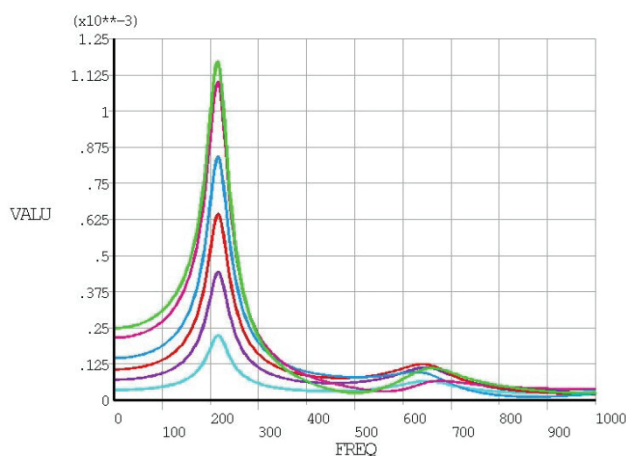


**Рисунок 4.**  
**Пример 1.**  
**Расчетная схема**

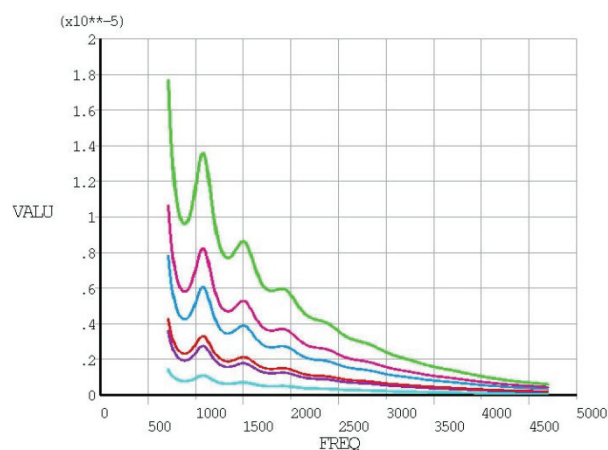
Примем следующие характеристики для стержня. Сечение – прямоугольное с размерами 0,1 x 0,1 м; длина 6,00 м; плотность материала 7850 кг/м<sup>3</sup>, модуль Юнга 2,1e11 Па.

При заданных параметрах первые пять собственных частот таковы: 215,51, 646,48, 1077,30, 1508,00 и 1938,50 Гц. Полученные значения хорошо согласуются с теоретическим решением [12]. Для построения графика амплитудно-частотной характеристики введем гармоническую внешнюю нагрузку с амплитудой 100 кН, приложенную к свободному концу стержня, в диапазоне частот  $\omega$  0 ÷ 4700 Гц. Будем проводить анализ для характерных точек стержня при коэффициенте затухания (демпфирования) по материалу 0,1 [15]. Указанный способ учета внутренних сил сопротивления принят для большей наглядности моделирования, в отличие от широко применяемой модели Рэлея [16].

На рис. 5 приведены графики амплитудно-частотной характеристики в диапазоне вынуждающих частот  $\omega$  0 ÷ 1000 Гц для точек, равномерно расположенных по длине стержня. Полученные значения хорошо согласуются с теоретическими решениями [11, 12], при этом четко просматриваются резонансные отклики первых собственных частот.



**Рисунок 5. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня для диапазона частот 0 ÷ 1000 Гц**



**Рисунок 6. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня, расположенных в окрестности заделки, для диапазона частот 700 ÷ 4700 Гц**

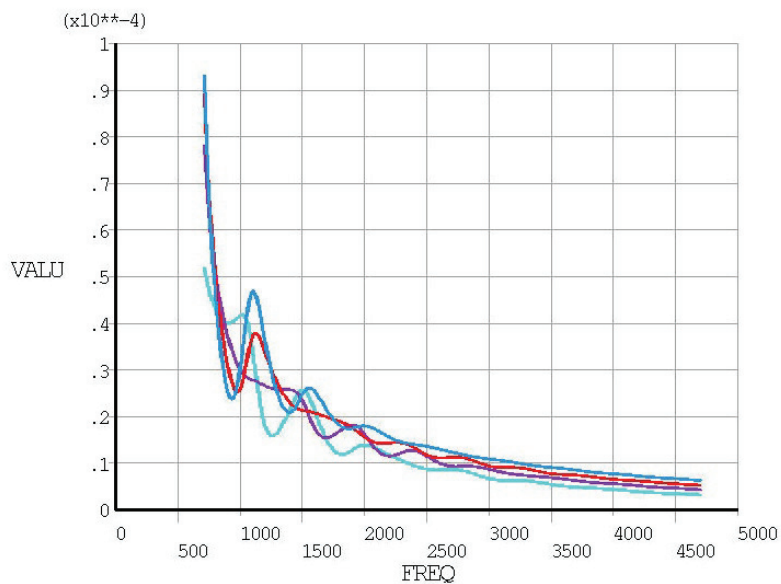
Принимая во внимание большую разницу между величинами амплитуд колебаний отдельных точек стержня, дальнейший анализ будем проводить по отдельности для точек, расположенных в непосредственной близости от заделки и от свободного края.

На рис. 6 приведены графики амплитудно-частотной характеристики для точек, расположенных в окрестности заделки.

Анализируя рис. 6, отметим, что по мере увеличения частоты вынуждающей силы происходит выравнивание графика амплитудно-частотной характеристики с утратой резонансных всплесков, что подтверждает выводы, сделанные выше. Так видно, что величина граничной частоты меньше 2500 Гц, что соответствует 6-й форме собственных колебаний с частотой 2368,50 Гц.

На рис. 7 приведены графики амплитудно-частотной характеристики для точек, расположенных в окрестности свободного края.

Сделанные выше заключения подтверждаются также и рис. 7. Следует отметить, что характерная частота для указанного участка стержня превышает величину 2500 Гц, полученную ранее (рис. 6), и составляет 3227,40 Гц, что соответствует 8-й форме собственных колебаний.



**Рисунок 7. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня, расположенных в окрестности свободного края, для диапазона частот 700 ÷ 4700 Гц**



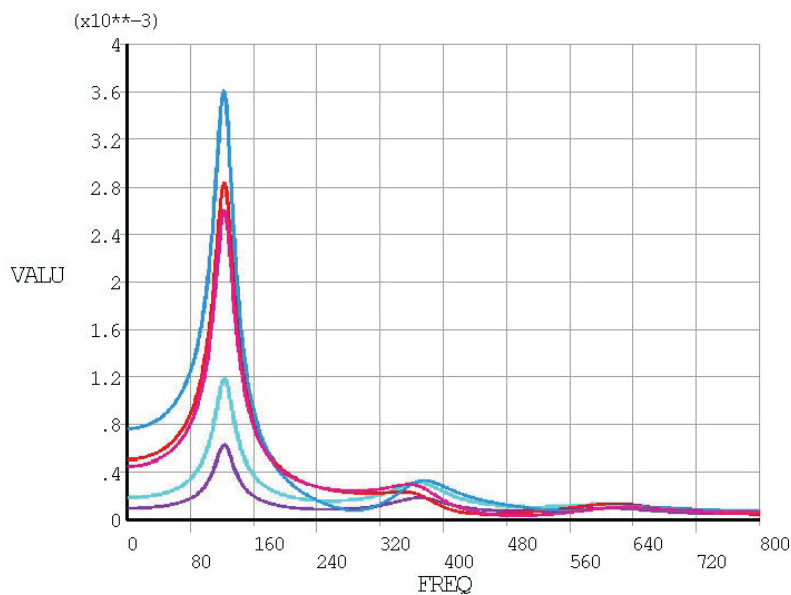
**Рисунок 8. Пример 2. Расчетная схема**

В качестве второго примера рассмотрим изгибные колебания того же стержня (рис. 8).

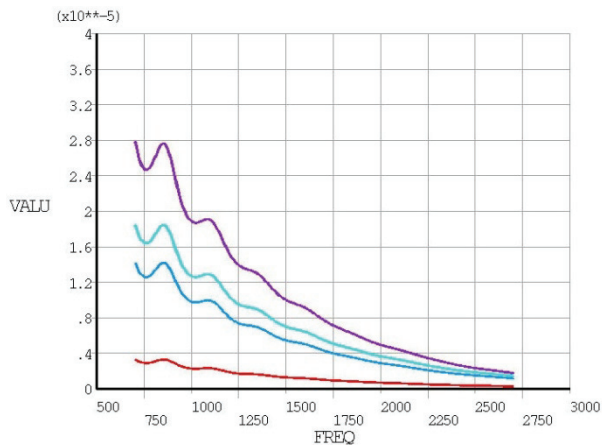
Первые пять собственных частот составят 122,61, 367,80, 613,10, 858,30 и 1103,50 Гц. Для выполнения анализа будем использовать алгоритм, аналогичный примеру 1. Рассмотрим колебания стержня при амплитуде вынуждающей силы 10 кН в диапазоне частот  $\omega$  0 ÷ 2700 Гц.

На рис. 9 приведены графики амплитудно-частотной характеристики в диапазоне вынуждающих частот  $\omega$  0 ÷ 800 Гц для точек, равномерно расположенных по длине стержня. Полученные значения хорошо согласуются с теоретическими решениями [11, 12], при этом так же четко просматриваются резонансные отклики первых собственных частот.

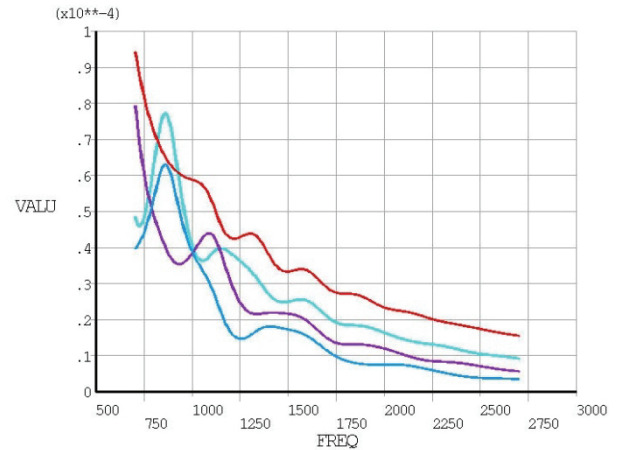
На рис. 10, 11 приведены графики амплитудно-частотной характеристики для точек, расположенных в окрестности заделки и в окрестности свободного края, для диапазона частот 700 ÷ 2700 Гц.



**Рисунок 9. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня для диапазона частот 0 ÷ 800 Гц**



**Рисунок 10. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня, расположенных в окрестности заделки, для диапазона частот 700 ÷ 2700 Гц**



**Рисунок 11. Графики амплитудно-частотной характеристики точек стержня, расположенных в окрестности свободного края, для диапазона частот 700 ÷ 2700 Гц**

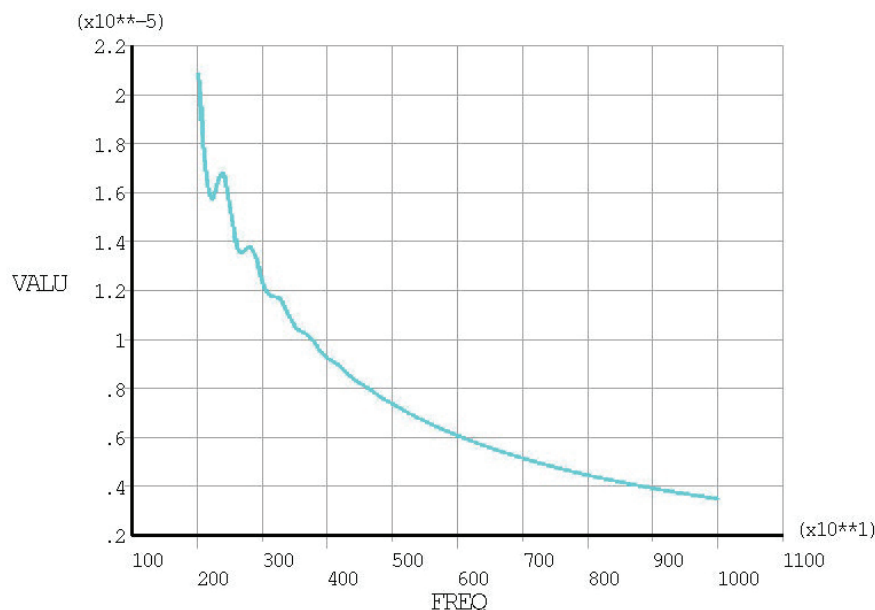
Анализируя рис. 9 ÷ 11, можно заключить, что граничная частота для участка стержня, примыкающего к заделке, составляет 1348,80 Гц (рис. 10), что соответствует 6-й форме собственных колебаний, для свободного края – 1839,30 Гц (рис. 11), что соответствует 8-й форме.

Проанализируем часть спектра собственных частот, лежащую за граничной частотой.

Для наглядности представим амплитудно-частотную характеристику для точки стержня первого примера (рис. 4) в диапазоне частот 2000 ÷ 10000 Гц на рис. 12, а также преобразуем соотношение (2), выделив в нем величины, не зависящие от частоты вынуждающей силы  $\omega$ :

$$A_n^* = \left( \frac{h_n E}{\rho F p_n^2 k} \right) \frac{1}{\omega}. \quad (7)$$

Из соотношения (7) и графика на рис. 12 видно, что амплитуда вынужденных колебаний обратно пропорциональна частоте вынуждающей силы  $\omega$ . Таким образом, амплитудно-частотная характеристика данного стержня после граничной частоты представляет собой гиперболическую зависимость от частоты вынуждающей силы.



**Рисунок 12. График амплитудно-частотной характеристики точки стержня примера 1, расположенной в окрестности свободного края, для диапазона частот 2000 ÷ 10000 Гц**



## Выводы

1. С помощью математических преобразований и численных экспериментов было показано существование у простых стержневых конструкций смешанного спектра частот, образованного дискретной и сплошной частью. При этом существует некая граничная частота, разделяющая указанные части спектра. Полученные результаты подтверждают выводы работ [1÷3].

2. Указанная граничная частота определяет верхнюю границу частоты внешнего воздействия, для которого необходимо проводить динамический расчет конструкции.

3. Было показано, что амплитуда колебаний конструкции с частотой, превышающей граничную, не зависит от динамических характеристик, а в большей степени определяется статическими характеристиками стержня и действующей нагрузкой.

## Литература:

1. Беляев А. К. Высокочастотная динамика сложных инженерных конструкций : дис. ... доктора физ.-мат. наук. СПб. , 2001. 232 с.
2. Belyaev A. K. Combining continuous and discrete energy approaches to high frequency dynamics of structures // Selected topics in structronics and mechatronic systems. World Scientific Publishers, 2003. pp. 221-267.
3. Belyaev A. K. High frequency dynamics of engineering structures // Advanced Dynamics and Control of Structures and Machines. Springer Wien New York, 2004. Pp. 77-96.
4. Зверьев Е. М., Докина Д. Л. Сравнительный анализ моделей низкочастотных и высокочастотных колебаний балочных элементов авиационных конструкций // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2007. № 123. С. 41-47.
5. Индейцев Д. А., Кузнецов Н. Г., Мотыгин О. В., Мочалова Ю. А. Локализация линейных волн. СПб. : Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2007. 342 с.
6. Акуленко Л.Д. Высокочастотные собственные колебания механических систем // Прикладная математика и механика. 2000. № 5. Том 64. С. 817-832.
7. Тимошенко С. П. Колебания в инженерном деле. М. : Наука, 1967. 444 с.
8. Лалин В. В. Уравнения нелинейной динамики моментной упругой среды // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. 2007. Т. 1. №49. С. 97-105.
9. Абдикаримов Р.А., Эшматов Х., Бобаназаров Ш.П., Ходжаев Д.А., Эшматов Б.Х. Математическое моделирование и расчет гидротехнических сооружений типа плотины-пластины с учетом сейсмической нагрузки и гидродинамического давления воды // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 3. С. 59-70.
10. Козинец Г.Л. Определение динамических характеристик сооружений, контактирующих с водой, на примере арочной бетонной плотины Саяно-Шушенской ГЭС // Инженерно-строительный журнал. 2011. № 5. С. 43-48
11. Пановко Я. Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М. : Физматгиз, 1960. 193 с.
12. Бабаков И. М. Теория колебаний. М. : Дрофа, 2004. 591 с.
13. Mitra A., Sahoo P., Saha K.N. Large amplitude forced vibration analysis of cross-beam system through energy method // International journal of engineering, science and technology. 2010. Vol. 2, № 4. Pp. 113-133.
14. Ming-Hung Hsu. Vibration analysis of non-union beams resting on elastic foundations using the spline collocation method // Tamkang journal of science and engineering. 2009. Vol. 12, № 2. Pp. 113-122.
15. Коренев Б. Г., Рабинович И. М. Справочник по динамике сооружений. М. : Стройиздат, 1972. 511 с.
16. Тяпин А. Г. Обобщение модели демпфирования Рэлея для динамических расчетов: вопросы практического применения // Сейсмостойкое строительство. Безопасность сооружений. 2009. № 6. С. 15 – 17.

\* Григорий Валентинович Денисов, Санкт-Петербург, Россия

Тел. моб.: +7(921)385-56-12; эл. почта: ohoxoh@mail.ru

doi: 10.5862/MCE.27.10

## About the continuous spectrum of vibrations of beam construction elements under high-frequency effects

**G.V. Denisov**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

**V.V. Lalin**

*Saint-Petersburg State Polytechnical University, Saint-Petersburg, Russia*

+7(921)385-56-12; e-mail: oxoxox@mail.ru

### Key words

high-frequency vibrations; continuous spectrum; discrete spectrum; rod; boundary frequency

### Abstract

In this paper the high-frequency vibrations of beam structural elements on the example of cantilever rod are analyzed. The purpose of this article is to show the existence of the boundary frequency, above which the structure behaves as a system with a continuous spectrum, on elementary examples and to demonstrate the possibility of using this fact during engineering calculations performing.

With the help of mathematical transformations and numerical experiments the existence of simple beam structures mixed spectrum, formed by the discrete and continuous parts, is shown. It is also shown that there is a boundary frequency that separates the portions of the spectrum and determines the upper frequency limit of the external effects, for which it is necessary to conduct dynamic account of structures. In this case the amplitude of the vibrations with a frequency exceeding the boundary one does not depend on the dynamic characteristics of the rod, but it is mostly determined by the static characteristics of the rod and the load.

### References

1. Belyaev A. K. *Vysokochastotnaya dinamika slozhnykh inzhenernykh konstruksiy*. Dissertatsiya na soiskanie uchenoy stepeni doktora fiziko-matematicheskikh nauk [High-frequency dynamics of complex engineering structures]. Saint-Petersburg, 2001. 232 p. (rus)
2. Belyaev A. K. Combining continuous and discrete energy approaches to high frequency dynamics of structures. *Selected topics in structronics and mechatronic systems*. World Scientific Publishers, 2003. Pp. 221-267.
3. Belyaev A. K. High frequency dynamics of engineering structures. *Advanced Dynamics and Control of Structures and Machines*. Springer Wien New York, 2004. Pp. 77-96.
4. Zveryaev Y. M., Dokina D. L. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoj aviatsii* [Scientific Bulletin of the Moscow State Technical University of Civil Aviation]. 2007. No. 123. Pp. 41-47. (rus)
5. Indeytsev D. A., Kuznetsov N. G., Motygin O. B., Mochalova Y. A. *Lokalizatsiya lineynykh voln* [Localization of linear waves]. Saint-Petersburg: Saint-Petersburg State University, 2007. 342 p. (rus)
6. Akulenko L.D. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]. 2000. No. 5. Vol. 64. Pp. 817-832. (rus)
7. Timoshenko S. P. *Kolebaniya v inzhenernom dele* [Vibration problems in engineering]. Moscow: Nauka, 1967. 444 p. (rus)
8. Lalin V. V. *Nauchno-tekhnicheskiye vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politekhnicheskogo universiteta* [Scientific and technical statements of the St. Petersburg State Polytechnical University]. 2007. Vol. 1. No. 49. Pp. 97-105. (rus)
9. Abdikarimov R. A., Eshmatov H., Bobanazarov S. P., Hodzhaev D. A., Eshmatov B. H. *Magazine of Civil engineering*. 2011. No. 3. Pp. 59-70. (rus)
10. Kozinetc G.L. *Magazine of Civil engineering*. 2011. No. 5. Pp. 43-48. (rus)
11. Panovko Y. G. *Vnutrennee treniye pri kolebaniyakh uprugikh sistem* [Internal friction in the oscillations of elastic systems]. Moscow: Fizmatgiz, 1960. 193 p. (rus)
12. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of vibrations]. Moscow: Drofa, 2004. 591 p. (rus)

Denisov G.V., Lalin V.V. About the continuous spectrum of vibrations of beam construction elements under high-frequency effects



13. Mitra A., Sahoo P., Saha K. N. Large amplitude forced vibration analysis of cross-beam system through energy method. *International journal of engineering, science and technology*. 2010. Vol. 2, No. 4. Pp. 113-133.
14. Ming-Hung Hsu. Vibration analysis of non-union beams resting on elastic foundations using the spline collocation method. *Tamkang journal of science and engineering*. 2009. Vol. 12, No. 2. Pp. 113-122.
15. Korenev B. G., Rabinovich I. M. *Spravochnik po dinamike sooruzheniy* [Handbook of structural dynamics]. Moscow: Stroyizdat, 1972. 511 p. (rus)
16. Tyapin A. G. *Seysmostoykoye stroitelstvo. Bezopasnost sooruzheniy* [Earthquake engineering. Security structures]. 2009. No. 6. Pp. 15-17. (rus)

**Full text of this article in Russian: pp. 91-97**