

Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ

Д.т.н., профессор В.Ф. Оробей;

Д.т.н., профессор Н.Г. Сурьянинов;*

Одесский национальный политехнический университет

Ключевые слова: метод граничных элементов; метод конечных элементов; функция Хевисайда; задача Коши; сплайн-функция; фундаментальные функции

Большинство задач строительной механики, связанных с исследованием напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов, сводится, как правило, к одному или нескольким дифференциальным уравнениям.

Точные решения этих уравнений, или решения в замкнутом виде, удается получить далеко не всегда. В остальных случаях точные решения либо принципиально невозможны (когда граничные условия или условия на контуре нельзя выразить в аналитической форме), либо приходится сталкиваться с таким объемом вычислений, что получение аналитических решений становится нецелесообразным. В связи с этим при решении многих практических задач давно используются приближенные методы исследования.

Эти методы можно разбить на две основные группы [1, 2, 3]. К первой группе относятся вариационные методы, применение которых позволяет получить численные алгоритмы и приближенные аналитические выражения искомых функций (напряжений, перемещений, внутренних усилий и др.). Вторую группу составляют численные методы, при использовании которых определяются значения искомых функций при тех или иных значениях аргументов.

Как известно, в настоящее время наиболее разработанным численным методом является метод конечных элементов (МКЭ). Этот метод является мощным средством решения задач не только строительной механики, но и целого ряда других дисциплин: гидрогазодинамики, теплотехники, электротехники и т.д. Основные концепции МКЭ были разработаны достаточно давно, однако по-настоящему реализовать все его возможности удалось с появлением последних поколений компьютерной техники, обладающей большими объемами памяти для выполнения и хранения значительного количества вычислений, а также хорошим быстродействием.

Количество компьютерных программ, реализующих метод конечных элементов, исчисляется десятками, если не сотнями. Среди них отметим таких гигантов, как ANSYS, CosmosWorks, ABAQUS, NASTRAN, Mechanical Desktop, SCAD Structure [4].

Наиболее серьезной проблемой МКЭ, очевидно, следует считать проблему сходимости полученного решения, оценку погрешности, связанной с дискретизацией исходной геометрической модели. Помимо этого, у метода существует еще целый ряд существенных недостатков — искусственное ограничение области расчета, дискретизация окружающего пространства, выполнение новой дискретизации при изменении положения элементов. Анализ литературных источников показывает, что к настоящему времени ресурсы совершенствования МКЭ практически исчерпаны. Это подчеркивает актуальность разработки новых, более эффективных, чем МКЭ, численных методов, а также реализующих их программных комплексов, позволяющих более экономично использовать вычислительные ресурсы и гарантировать эффективное решение многовариантных задач анализа и проектирования.

Поиск альтернативных подходов привёл к появлению нового метода, а точнее, методов граничных элементов (МГЭ). Здесь дискретизации подвергается не вся рассматриваемая область, как в методе конечных элементов, а только её граница. Хотя эта концепция и является общей для всех МГЭ, принято различать прямой вариант МГЭ, полупрямые варианты и непрямые.

Авторами статьи предложен и разработан новый вариант МГЭ, который получил название «Численно-аналитический метод граничных элементов» [1, 5, 6]. Это направление в развитии методов граничных элементов имеет целый ряд преимуществ [5] по сравнению с классическими вариантами МГЭ, разработанными в трудах Бенерджи и Баттерфилда [7], Бреббиа, Толлеса и др. [2, 8]. Метод состоит в разработке фундаментальной системы решений (аналитически) и функций Грина (также аналитически) для каждой рассматриваемой задачи. Для учета определенных граничных условий, или условий контакта между отдельными модулями (так мы называем отдельный элемент системы) составляется небольшая система линейных алгебраических уравнений, которую необходимо решать численно.

Многие ученые и, в первую очередь, «чистые» математики, считают, что правильнее было бы называть этот метод аналитическим, а не численно-аналитическим, т.к. все основные операции сводятся к аналитическим преобразованиям, а объем вычислительной работы на заключительном этапе не превышает обычного для других аналитических подходов объема.

Оробей В.Ф., Сурьянинов Н.Г. Основные положения численно-аналитического варианта МГЭ

Привлекательность МГЭ обусловлена рядом причин. Дискретизация только границы области, занимаемой объектом, резко уменьшает порядок системы разрешающих уравнений; есть возможность снижения мерности решаемой задачи. Кроме того, метод строго обоснован математически, т.к. использует фундаментальные решения дифференциальных уравнений, а значит, в рамках принимаемых гипотез позволяет получить точные значения параметров задачи (усилий, перемещений, напряжений, токов, частот собственных колебаний, критических сил потери устойчивости и т.д.) внутри области. Отметим также простоту логики алгоритма, хорошую сходимость решения, высокую устойчивость и малое накопление погрешностей при численных операциях.

В ближайших номерах «Инженерно-строительного журнала» мы планируем опубликовать серию статей, в которых постараемся раскрыть суть предложенного нами метода применительно к расчетам стержневых систем, пластин и оболочек.

Итак, значительное число задач механики упругого стержня сводится к решению линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = q(x), \tag{1}$$

удовлетворяющего начальным условиям:

$$y(0) = y_0; \quad y'(0) = y'_0; \quad \dots \quad y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \tag{2}$$

Как известно, такая задача определения частного решения уравнения (1), удовлетворяющего условиям (2), называется задачей Коши [9]. Для изгиба, поперечных колебаний, кручения тонкостенных стержней, продольно-поперечного изгиба и т. п. видов деформирования, решение задачи Коши можно записать в матричной форме:

$EIv(x)$	=	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	+	\int_0^x	$EIv(0)$)	$A_{14}(x - \xi)$	$q(\xi)d\xi,$
$EI\varphi(x)$		A_{21}	A_{22}	$-A_{23}$	$-A_{24}$			$EI\varphi(0)$		$A_{24}(x - \xi)$	
$M(x)$		$-A_{31}$	$-A_{32}$	A_{33}	A_{34}			$M(0)$		$-A_{34}(x - \xi)$	
$Q(x)$		$-A_{41}$	$-A_{42}$	A_{43}	A_{44}			$Q(0)$		$-A_{44}(x - \xi)$	

или компактно:

$$Y(x) = A(x)X(0) + B(x), \tag{4}$$

где $Y(x)$ – вектор параметров напряженно-деформированного состояния стержня в текущей точке;

$A(x)$ – квадратная матрица фундаментальных ортонормированных функций уравнения (3);

$X(0)$ – вектор начальных параметров;

$B(x)$ – вектор (матрица-столбец) внешней нагрузки.

Если несколько стержней соединены в единую конструкцию, то для системы стержней можно составить матричное уравнение типа (4). Матрица $A(x)$ преобразуется к квазидиагональному виду, а векторы $Y(x)$, $X(0)$ и $B(x)$ будут содержать параметры состояния всех стержней по следующей структуре:

$$A = \begin{matrix} \begin{matrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A_{n-1} & \\ & & & & A_n \end{matrix} & ; & Y = \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n-1} \\ Y_n \end{matrix} & ; & X = \begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{n-1} \\ X_n \end{matrix} & ; & B = \begin{matrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_{n-1} \\ B_n \end{matrix} \end{matrix} \tag{5}$$

Если координате x каждого стержня дать граничное значение l_i , то для системы матриц (5) можно выполнить достаточное простое преобразование по схеме

$$Y(l) = A(l)X(0) + B(l) \rightarrow A(l)X(0) - Y(l) = -B(l) \rightarrow A_*(l)X_*(0, l) = -B(l), \quad (6)$$

где конечные граничные параметры матрицы Y переносятся на место нулевых параметров вектора X . При этом, эти векторы дополняются **уравнениями равновесия и совместности перемещений узловых точек и граничными условиями**. В конце схемы преобразований (6) получается **система линейных алгебраических уравнений относительно начальных и конечных параметров всех стержней конструкции**. После вычисления начальных параметров стержней их напряженно-деформированное состояние определяется по матричному уравнению (3). Таким образом, решение прямых задач строительной механики стержневых систем в МГЭ сводится к решению одной системы линейных алгебраических уравнений и вычислению напряженно-деформированного состояния во внутренних точках стержней по соотношениям метода начальных параметров. Такая схема решения обеспечивает получение весьма точных и достоверных результатов, которые можно представить средствами MATLAB (или другой среды) в виде обычных эпюр, форм свободных колебаний, потерь устойчивости и т. п. [10].

Главной операцией в схеме (6) является перенос параметров из Y в X . Процесс переноса конечных параметров вектора Y в вектор X основан на следующих положениях. Векторы Y , X любой стержневой (и не стержневой) конструкции при граничном значении координаты $x = l_i$ будут содержать 3 группы параметров.

Первая группа – это нулевые граничные параметры, которые определяются заданными условиями опирания (краевыми условиями).

Вторая группа – это зависимые параметры, связанные между собой обычными уравнениями равновесия и совместности перемещений узлов конструкции.

Граничные параметры третьей группы никак не связаны между собой. Эти параметры условно могут быть названы независимыми. Перенос параметров из вектора Y в вектор X должен компенсироваться ненулевыми элементами матрицы A , иначе нарушается исходное уравнение схемы (6). Очевидно, что независимые параметры вектора Y должны быть перенесены на место нулевых параметров вектора X , а зависимые параметры переносятся в соответствии с уравнениями их связи. Перед операцией переноса параметров необходимо освободить поля матрицы A от элементов, связанных с нулевыми параметрами вектора X , т. е. обнулить столбцы матрицы A , номера которых равны номерам нулевых строк матрицы X . Далее в матрицу A вводятся ненулевые компенсирующие элементы и преобразования по схеме (6) завершены, поскольку в матрице B изменяются только знаки элементов. Правило для определения величины и положения компенсирующих элементов при переносе параметров включает 3 основных случая.

1-й случай. При переносе независимого параметра вектора Y в вектор X компенсирующий элемент матрицы A равен коэффициенту при переносимом параметре со своим знаком по схеме:

	i	j	k	l		i	j	k	l
i		ℓ	$-\ell^2/2$	$-\ell^3/6$	←	$Y_{i1} = 0$			
j		1	$-\ell$	$-\ell^2/2$	←	$Y_{j1} = 0$			
k	$-a$		1	ℓ	←	aY_{k1}			
l				1	←	$Y_{l1} = 0$			

т. е. компенсирующий элемент матрицы A равен $(-a)$ и должен появиться на месте (k, i) , где k – номер строки матрицы Y , где находился параметр, i – номер строки матрицы X , куда переносится параметр. Другими словами, первый индекс положения компенсирующего элемента указывает на старый адрес переносимого параметра, а второй индекс – новый адрес в матрице X .

2-й случай. Перенос зависимых параметров представляет собой повторение операций 1-го случая с той лишь разницей, что в матрице X не появляются новые параметры, а в матрице A_* соответствующие строки могут содержать несколько компенсирующих элементов:

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<i>i</i>	- <i>a</i>	<i>b</i>		
<i>j</i>				
<i>k</i>				
<i>l</i>	-1			

$X_{i1} = 0; Y_{l1}$
X_{j1}
X_{k1}
X_{l1}

 \longleftrightarrow

<i>i</i>	$Y_{i1} = aY_{l1} - bX_{j1}$
<i>j</i>	$Y_{j1} = 0$
<i>k</i>	$Y_{k1} = 0$
<i>l</i>	Y_{l1}

(8)

3-й случай. В сложных конструкциях в одном узле могут находиться несколько начальных точек стержней. В этом случае возникают уравнения связи между начальными параметрами и требуется переносить параметры в пределах вектора X . Компенсирующие элементы в этом случае формируются из матриц фундаментальных функций, столбцы которой получают сдвиг в соответствии со схемой (9).

Видно, что элементы матрицы A сдвигаются на место столбца, номер которого равен номеру строки нового положения параметра. Компенсирующие элементы равны произведению коэффициента при переносимом параметре на элементы матрицы A . При этом возрастает число компенсирующих элементов по сравнению со случаями 1 и 2. Поэтому необходимо, по возможности, избегать случаев, когда в узле сходятся две и больше начальных точек стержней.

Более подробно системы линейных алгебраических уравнений типа (6) для стержневых систем будут представлены в последующих публикациях, при решении конкретных задач.

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<i>i</i>	1	ℓ	$-\ell^2/2$	$-\ell^3/6$
<i>j</i>		1	$-\ell$	$-\ell^2/2$
<i>k</i>			1	ℓ
<i>l</i>				1

X_{i1}
X_{j1}
$X_{k1} = a; X_{i1}$
X_{l1}

(9)

	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>
<i>i</i>	$1 - a\ell^2/2$	ℓ		$-\ell^3/6$
<i>j</i>	$-a\ell$	1		$-\ell^2/2$
<i>k</i>	a			ℓ
<i>l</i>				1

X_{i1}
X_{j1}
X_{l1}

Фундаментальные функции, элементы нагрузки и матрицы напряженно-деформированного состояния стержней

Изгиб прямолинейного стержня

$EIV(x)$	1	x	$-A_{13}$	$-A_{14}$
$EIV\phi(x)$		1	$-x$	$-A_{13}$
$M(x)$			1	x
$Q(x)$				1

 $=$

$EIV(0)$	$(x-\xi)^3 q_y(\xi)/6$
$EIV\phi(0)$	$(x-\xi)^2 q_y(\xi)/2$
$M(0)$	$-(x-\xi)q_y(\xi)$
$Q(0)$	$-q_y(\xi)$

 $+ \int_0^x d\xi,$
(10)

где $A_{13} = x^2/2$; $A_{14} = x^3/6$.

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= F(x-a_1)_+^3 / 6 + M(x-a_2)_+^2 / 2 + q[(x-a_3)_+^4 - (x-a_4)_+^4] / 24; \\
 B_{21} &= F(x-a_1)_+^2 / 2 + M(x-a_2)_+ + q[(x-a_3)_+^3 - (x-a_4)_+^3] / 6; \\
 B_{31} &= F(x-a_1)_+ + M \cdot H(x-a_2) + q[(x-a_3)_+^2 - (x-a_4)_+^2] / 2; \\
 B_{41} &= F \cdot H(x-a_1) + q[(x-a_3)_+ - (x-a_4)_+].
 \end{aligned} \tag{11}$$

Знак «+» в формулах (11) и ниже указывает на сплайн-функцию (функциональный прерыватель по терминологии учебников по сопротивлению материалов) [11-14].

Поперечные колебания прямолинейного стержня (функции А.Н.Крылова)

$EIV(x)$	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIV(0)$	$+ \int_0^x q_y(\xi) d\xi,$	$A_{14}(x-\xi)$
$EI\varphi(x)$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi(0)$		$A_{13}(x-\xi)$
$M(x)$	$-\lambda^4 A_{13}$	$-\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$-A_{12}$	$M(0)$		$-A_{12}(x-\xi)$
$Q(x)$	$-\lambda^4 A_{12}$	$-\lambda^4 A_{13}$	$\lambda^4 A_{14}$	A_{11}	$Q(0)$		$-A_{11}(x-\xi)$

(12)

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 m}{EI}}; \quad A_{11} = (\operatorname{ch} \lambda x + \cos \lambda x) / 2; \quad A_{12} = (\operatorname{sh} \lambda x + \sin \lambda x) / 2\lambda; \\
 A_{13} = (\operatorname{ch} \lambda x - \cos \lambda x) / 2\lambda^2; \quad A_{14} = (\operatorname{sh} \lambda x - \sin \lambda x) / 2\lambda^3;$$

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{F}{2\lambda^3} [\operatorname{sh} \lambda(x-a_1)_+ - \sin \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M}{2\lambda^2} [\operatorname{ch} \lambda(x-a_2)_+ - \cos \lambda(x-a_2)_+] + \\
 &+ q \left[\frac{\operatorname{ch} \lambda(x-a_3)_+ + \cos \lambda(x-a_3)_+ - 2H(x-a_3) - \operatorname{ch} \lambda(x-a_4)_+ - \cos \lambda(x-a_4)_+ + 2H(x-a_4)}{2\lambda^4} \right]; \\
 B_{21} &= \frac{F}{2\lambda^2} [\operatorname{ch} \lambda(x-a_1)_+ - \cos \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M}{2\lambda} [\operatorname{sh} \lambda(x-a_2)_+ + \sin \lambda(x-a_2)_+] + \\
 &+ q \frac{\operatorname{sh} \lambda(x-a_3)_+ - \sin \lambda(x-a_3)_+ - \operatorname{sh} \lambda(x-a_4)_+ + \sin \lambda(x-a_4)_+}{2\lambda^3}; \\
 B_{31} &= \frac{F}{2\lambda} [\operatorname{sh} \lambda(x-a_1)_+ + \sin \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M}{2} [\operatorname{ch} \lambda(x-a_2)_+ + \cos \lambda(x-a_2)_+] + \\
 &+ q \frac{\operatorname{ch} \lambda(x-a_3)_+ - \cos \lambda(x-a_3)_+ - \operatorname{ch} \lambda(x-a_4)_+ + \cos \lambda(x-a_4)_+}{2\lambda^2}; \\
 B_{41} &= \frac{F}{2} [\operatorname{ch} \lambda(x-a_1)_+ + \cos \lambda(x-a_1)_+] + \frac{M\lambda}{2} [\operatorname{sh} \lambda(x-a_2)_+ - \sin \lambda(x-a_2)_+] + \\
 &+ q \frac{\operatorname{sh} \lambda(x-a_3)_+ + \sin \lambda(x-a_3)_+ - \operatorname{sh} \lambda(x-a_4)_+ - \sin \lambda(x-a_4)_+}{2\lambda}.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь a_1, a_2, a_3, a_4 – координаты соответствующих нагрузок.

Продольно-поперечный изгиб прямолинейного стержня. Продольная сила сжимающая (задачи устойчивости)

$EIV(x)$	1	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIV(0)$	$,$	$EIV(0)$
$EI\varphi(x)$		A_{22}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi(0)$		$EI\varphi(0)$
$M(x)$		$-A_{32}$	A_{22}	A_{12}	$M(0)$		$M(0)$
$Q(x)$				1	$Q(0)$		$Q(0)$

(14)

где $n = \sqrt{\frac{F}{EI}}$,

$$A_{12} \sin nx / n; \quad A_{13} = (1 - \cos nx) / n^2; \quad A_{14} = (nx - \sin nx) / n^3; \quad A_{22} = \cos nx; \quad A_{32} = -n \sin nx. \quad (15)$$

Изгиб балки на упругом основании с одним коэффициентом постели (модель Винклера)

$EIv(x)$	A_{11}	A_{12}	$-A_{13}$	$-A_{14}$	$EIv(0)$
$EI\varphi(x)$	A_{21}	A_{11}	$-A_{12}$	$-A_{13}$	$EI\varphi(0)$
$M(x)$	$-A_{31}$	$-A_{21}$	A_{11}	A_{12}	$M(0)$
$Q(x)$	$-A_{41}$	$-A_{31}$	A_{21}	A_{11}	$Q(0)$

$$= \int_0^x \begin{matrix} A_{14}(x-\xi) \\ A_{13}(x-\xi) \\ -A_{12}(x-\xi) \\ -A_{11}(x-\xi) \end{matrix} \cdot q(\xi) d\xi, \quad (16)$$

где $\lambda = \sqrt[4]{\frac{k\delta}{4EI}}$, 1/м,

$$A_{11} = ch\lambda x \cdot \cos \lambda x; \quad A_{12} = \frac{ch\lambda x \cdot \sin \lambda x + sh\lambda x \cdot \cos \lambda x}{2\lambda}; \quad A_{13} = \frac{sh\lambda x \cdot \sin \lambda x}{2\lambda^2};$$

$$A_{14} = \frac{ch\lambda x \cdot \sin \lambda x - sh\lambda x \cdot \cos \lambda x}{4\lambda^3}; \quad A_{21} = -\lambda(ch\lambda x \cdot \sin \lambda x - sh\lambda x \cdot \cos \lambda x);$$

$$A_{31} = -2\lambda^2 \cdot sh\lambda x \cdot \sin \lambda x; \quad A_{41} = -2\lambda^3(ch\lambda x \cdot \sin \lambda x + sh\lambda x \cdot \cos \lambda x);$$

$$B_{11} = M \frac{sh\lambda(x - a_M)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_M)_+}{2\lambda^2} +$$

$$+ F \frac{ch\lambda(x - a_F)_+ \sin \lambda(x - a_F)_+ - sh\lambda(x - a_F)_+ \cos \lambda(x - a_F)_+}{4\lambda^3} +$$

$$+ q \left[\frac{H[\lambda(x - a_n)] - ch\lambda(x - a_n)_+ \cdot \cos(x - a_n)_+}{4\lambda^4} - \frac{H[\lambda(x - a_k)] - ch\lambda(x - a_k)_+ \cdot \cos(x - a_k)_+}{4\lambda^4} \right];$$

$$B_{21} = M \frac{ch\lambda(x - a_M)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_M)_+ + sh\lambda(x - a_M)_+ \cdot \cos \lambda(x - a_M)_+}{2\lambda} +$$

$$+ F \frac{sh\lambda(x - a_F)_+ \sin \lambda(x - a_F)_+}{2\lambda^2} + q \left[\frac{ch\lambda(x - a_n)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_n)_+ - sh\lambda(x - a_n)_+ \cdot \cos(x - a_n)_+}{4\lambda^3} - \right.$$

$$\left. - \frac{ch\lambda(x - a_k)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_k)_+ - sh\lambda(x - a_k)_+ \cdot \cos(x - a_k)_+}{4\lambda^3} \right];$$

$$B_{31} = M \cdot ch\lambda(x - a_M)_+ \cdot \cos \lambda(x - a_M)_+ +$$

$$+ F \frac{ch\lambda(x - a_F)_+ \sin \lambda(x - a_F)_+ + sh\lambda(x - a_F)_+ \cos \lambda(x - a_F)_+}{2\lambda} +$$

$$+ q \left[\frac{sh\lambda(x - a_n)_+ \cdot \sin(x - a_n)_+ - sh\lambda(x - a_n)_+ \cdot \sin(x - a_n)_+}{2\lambda^2} \right];$$

$$B_{41} = M \cdot \lambda [sh\lambda(x - a_M)_+ \cdot \cos \lambda(x - a_M)_+ - ch\lambda(x - a_M)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_M)_+] +$$

$$+ F \cdot ch\lambda(x - a_F)_+ \cos \lambda(x - a_F)_+ + q \left[\frac{ch\lambda(x - a_n)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_n)_+ + sh\lambda(x - a_n)_+ \cdot \cos(x - a_n)_+}{2\lambda} - \right.$$

$$\left. - \frac{ch\lambda(x - a_k)_+ \cdot \sin \lambda(x - a_k)_+ - sh\lambda(x - a_k)_+ \cdot \cos(x - a_k)_+}{2\lambda} \right];$$

$H[\lambda(x - a_H)]$ – единичная функция Хевисайда.

Элементы матрицы нагрузки удобно представить в более компактном виде:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= M \cdot A_{13}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{14}(x - a_F)_+ + q[A_{15}(x - a_n)_+ - A_{15}(x - a_n)_+]; \\
 B_{21} &= M \cdot A_{12}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{14}(x - a_F)_+ + q[A_{14}(x - a_n)_+ - A_{14}(x - a_n)_+]; \\
 B_{31} &= M \cdot A_{11}(x - a_M)_+ + F \cdot A_{14}(x - a_F)_+ + q[A_{13}(x - a_n)_+ - A_{13}(x - a_n)_+]; \\
 B_{41} &= M \cdot [-4\lambda^4 \cdot A_{14}(x - a_M)_+] + F \cdot A_{11}(x - a_F)_+ + q[A_{12}(x - a_n)_+ - A_{12}(x - a_n)_+],
 \end{aligned} \tag{18}$$

где знак «+» обозначает сплайн-функцию, а фундаментальная функция A_{15} имеет вид:

$$A_{15} = \frac{H(\lambda x) - ch\lambda x \cdot \cos \lambda x}{4\lambda^4}. \tag{19}$$

Подобные наборы функций для описания деформирования стержней можно использовать в алгоритме МГЭ без дополнительных преобразований, что существенно упрощает процедуры расчетов конструкций. Конкретные примеры будут рассмотрены в последующих публикациях.

Литература

1. Баженов В. А., Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Численные методы в механике. Одесса : Стандартъ, 2005. 564 с.
2. Бреббиа К., Теллес Д., Вроубел Л. Методы граничных элементов / Под ред. Э.И. Григолюка. М. : Мир, 1987. 524 с.
3. Бреббиа К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике / Под ред. Э.И. Григолюка. М. : Мир, 1982. 248 с.
4. Сурьянинов Н. Г., Дашченко А. Ф., Лазарева Д. В. ANSYS в задачах инженерной механики / Под ред. Н.Г. Сурьянинова. Одесса : Астропринт, 2007. 484 с.
5. Дашченко А. Ф., Коломиец Л. В., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Численно-аналитический метод граничных элементов. Одесса : ВМВ, 2010. В 2-х томах. Т.1. 416 с. Т.2. 512 с.
6. Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. Практикум по решению краевых задач механики: Учебное пособие для студентов технических специальностей. Одесса : Астропринт, 2011. 408 с.
7. Бенерджи П. К., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках / Под ред. Р.В. Гольдшейна. М. : Мир, 1984. 494 с.
8. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. М. : Мир, 1987. 328 с.
9. Бермант А. Ф. Курс математического анализа. М. : Гостехиздат, 1953. 358 с.
10. Дашченко А. Ф., Оробей В. Ф., Сурьянинов Н. Г. MATLAB в механике деформируемого твердого тела. Алгоритмы и программы : Учебное пособие. Харьков : Бурун книга, 2011. 480 с.
11. Владимиров В. С. Обобщенные функции в математической физике. М. : Наука, 1979. 318 с.
12. Ершова В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / Под ред. В.И. Азаматовой. Минск : Вышэйшая школа, 1976. 255 с.
13. Земаян А. Г. Интегральные преобразования обобщенных функций. М. : Наука, 1974. 399 с.
14. Лазарян В. А., Конашенко С. И. Обобщенные функции в задачах механики. Киев : Наукова думка, 1974. 191 с.

* Николай Георгиевич Сурьянинов, г. Одесса, Украина
Тел. раб.: +38 (0482) 45-94-86; эл. почта: sng@mbei.opu.ua

doi: 10.5862/MCE.22.6

Substantive provisions of Numeral-analytical boundary elements method

V.F. Orobey;
N.G. Suryaninov,

Odessa National Polytechnic University, Odessa, Ukraine
+38 (0482) 45-94-86; e-mail: sng@mbei.opu.ua

Key words

boundary element method; finite elements method; Havesaid function; Cauchy problem; spline-function; fundamental functions

Abstract

Substantive propositions of the new method of design calculation, that got the name "Numeral-analytical of boundary elements method", offered by authors, are brought. A method consists of development of the fundamental system of decisions (analytically) and Green functions (also analytically) for every examined task.

For the account of certain border terms, or terms of contact between the separate modules (the separate element of the system is so named) the small system of linear algebraic equalizations, that must be decided numeral, is made.

Discretisation only of border of the area occupied by an object, sharply diminishes the order of the system of resolvent equalizations; there is possibility of decline of regularity of the decided task. A method is strictly reasonable mathematically, as uses the fundamental decisions of differential equalizations, and, means, within the framework of the accepted hypotheses allows to get the exact meaning of parameters of task (efforts, moving, tensions, currents, frequencies of eigentones, critical forces of loss of stability et cetera) into an area.

Simplicity of logic of algorithm, good convergence of decision, high stability and small accumulation of errors at numeral operations, is marked also.

References

1. Bazhenov V. A., Dashchenko A. F., Kolomiets L. V., Orobey V. F., Suryaninov N. G. *Chislennye metody v mekhanike* [The numerical methods in mechanics]. Odessa : Standart, 2005. 564 p. (rus)
2. Brebbia K., Telles D., Vrobel L. *Metody granichnykh elementov* [Boundary elements methods] / Pod red. E.I. Grigolyuka. Moscow : Mir, 1987. 524 p. (rus)
3. Brebbia K., Uoker S. *Primenenie metoda granichnykh elementov v tekhnike* [The use of boundary elements method in technics] / Pod red. E.I. Grigolyuka. Moscow : Mir, 1982. 248 p. (rus)
4. Suryaninov N. G., Dashchenko A. F., Lazareva D. V. *ANSYS v zadachakh inzhenernoy mekhaniki* [ANSYS in the engineering mechanics problems] / Pod red. N.G. Suryaninova. Odessa : Astroprint, 2007. 484 p. (rus)
5. Dashchenko A. F., Kolomiets L. V., Orobey V. F., Suryaninov N. G. *Chislenno-analiticheskiy metod granichnykh elementov* [Numerical-analytical boundary elements method]. Odessa : VMV, 2010. vol.1. 416 p. vol.2. 512 p. (rus)
6. Orobey V. F., Suryaninov N. G. *Praktikum po resheniyu kraevykh zadach mekhaniki: Uchebnoe posobie dlya studentov tekhnicheskikh spetsialnostey* [The workshop on the solution of boundary problems in mechanics: the tutorial for students of technical subjects]. Odessa : Astroprint, 2011. 408 p. (rus)
7. Benerdzhii P. K., Batterfield R. *Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh* [The boundary elements methods in applied sciences] / Pod red. R.V. Goldsheyna. Moscow : Mir, 1984. 494 p. (rus)
8. Krauch S., Starfield A. *Metody granichnykh elementov v mekhanike tverdogo tela* [The boundary elements methods in the mechanics of rigid body]. Moscow : Mir, 1987. 328 p. (rus)
9. Bermant A. F. *Kurs matematicheskogo analiza* [A course of mathematical analysis mathematical analysis]. Moscow : Gostekhizdat, 1953. 358 p. (rus)
10. Dashchenko A. F., Orobey V. F., Suryaninov N. G. *MATLAB v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela. Algoritmy i programmy : Uchebnoe posobie* [MATLAB in the deformable solid mechanics. Algorithms and programs]. Kharkov : Burun kniga, 2011. 480 p. (rus)
11. Vladimirov V. S. *Obobshchennye funktsii v matematicheskoy fizike* [Generalized functions in mathematical physics]. Moscow : Nauka, 1979. 318 p. (rus)
12. Ershova V. V. *Impulsnye funktsii. Funktsii kompleksnoy peremennoy. Operatsionnoe ischislenie* [Impulse functions. Functions of complex variable. Operational calculus] / Pod red. V.I. Azamatovoy. Minsk : Vysheyschaya shkola, 1976. 255 p. (rus)
13. Zemanyan A. G. *Integralnye preobrazovaniya obobshchennykh funktsiy* [Integral transformations of generalized functions]. Moscow : Nauka, 1974. 399 p. (rus)
14. Lazaryan V. A., Konashenko S. I. *Obobshchennye funktsii v zadachakh mekhaniki* [Generalized functions in mechanics problems]. Kiev : Naukova dumka, 1974. 191 p. (rus)

Full text of this article in Russian: pp. 33-39

Orobey V.F., Suryaninov N.G. Substantive provisions of Numeral-analytical boundary elements method