Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи)

К.т.н., профессор Р.А. Абдикаримов,
Ташкентский финансовый институт;
К.т.н В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Тонкостенные пластины и оболочки широко применяются в современном строительстве в качестве элементов как ограждающих, так и несущих конструкций, предназначенных для работы под воздействием значительных силовых нагрузок. Указанные нагрузки могут быть и статическими, и динамическими.

С целью обеспечения в нужных местах требуемой жесткости тонкие пластины или оболочки могут быть подкреплены ребрами, а могут иметь и плавные утолщения. Следовательно, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной (гладко-переменной или же ступенчато-переменной) толщины. Подкрепление пластин или оболочек ребрами делает, как правило, их профили асимметричными. Зачастую асимметрия профилей может иметь место и в случаях их плавных утолщений.

Известно, что тонкостенные элементы допускают достаточно большие прогибы (даже при нагрузках, далеких от своих критических значений). При долго длящихся нагрузках в материале пластин и оболочек может проявиться свойство ползучести (вязкоупругости), что приведет к существенному снижению их несущей способности.

Вне сомнения, что расчеты на прочность, колебания и устойчивость описанных конструкций играют важную роль при проектировании современных зданий и сооружений.

Таким образом, для получения более реальной картины напряженно-деформированного состояния (НДС) указанных элементов в виде пластин и оболочек необходимо проводить исследования в геометрически нелинейной постановке при совместном учете влияния асимметрии их профилей, а также возможного проявления вязкоупругих свойств материала.

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины (асимметричные случаи) в геометрически нелинейной постановке при учете ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [1–13]. В работах Р.А. Абдикаримова [14–16, 28–29], а также совместной работе Р.А. Абдикаримова и В.М. Жгутова [17] рассмотрены аналогичные задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих пластин и оболочек гладко-переменной толщины (симметричные случаи).

Тем не менее, поведение асимметричных пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете геометрической нелинейности и вязкоупругих свойств материала в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего изучения.

В свете изложенного разработка новых математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов решения нелинейных динамических задач о колебаниях и устойчивости вязкоупругих систем с гладко-переменной жесткостью (асимметричные случаи) представляется актуальной и важной.

Рассматриваем пологие оболочки на прямоугольном плане (в частности, пластины), а также круговые цилиндрические оболочки.

Некоторую внутреннюю поверхность оболочки принимаем за отсчетную поверхность $z=0$. Координатные линии x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны, а ось z – по внутренней нормали отсчетной поверхности.

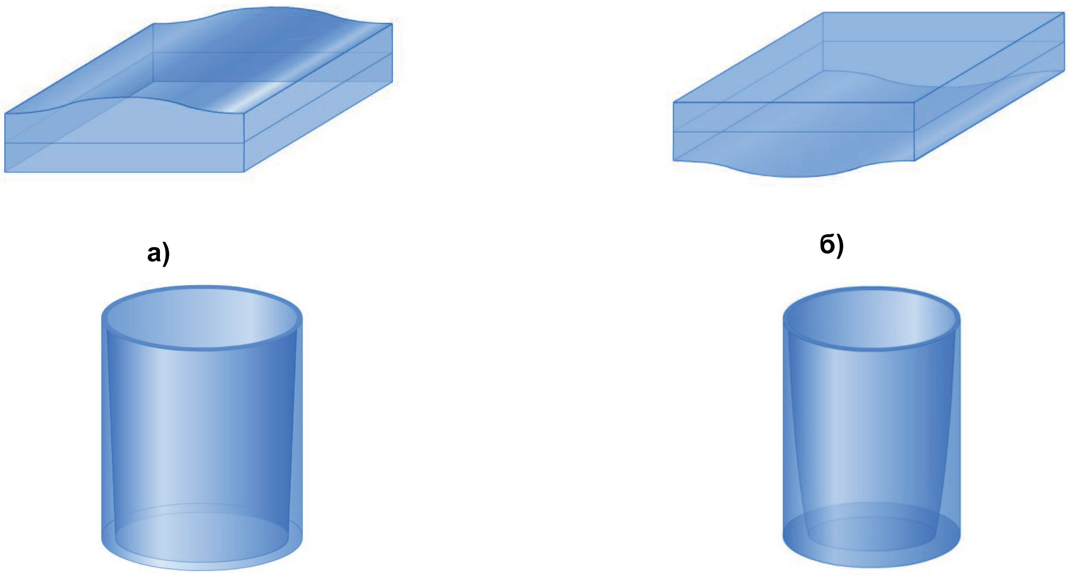
Толщину оболочки задаем ограничивающими ее (в нормальном направлении) гладкими поверхностями $z_B = z_B(x,y)$ и $z_H = z_H(x,y)$ (рис. 1).

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Основываясь на кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява, учитываем совместно геометрическую нелинейность и возможность развития деформации ползучести (вязкоупругости) в материале. Для описания процесса ползучести используем линейный вариант наследственной теории ползучести.

Математическую модель деформирования оболочки (пластины) понимаем как совокупность:

- геометрических соотношений (выражений деформаций через перемещения);
- физических соотношений (связи напряжений и деформаций);
- функционала полной энергии деформации (или действия), условие стационарности которого эквивалентно уравнениям равновесия или движения.



а) б)

в) г)

Рисунок 1. Примеры пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи): а) и б) – пологие оболочки (в частности, пластины); в) и г) – круговые цилиндрические оболочки.

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности $z=0$ с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}-k_x w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}-k_y w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\quad \varepsilon_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y},\quad (1)$$

где ε_x, ε_y и ε_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x, y и сдвига в касательной плоскости (dx, dy); u, v и w – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей x, y и z соответственно; $k_x=1/R_1$ и $k_y=1/R_2$ – главные кривизны (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно.

В случае пластины в соотношениях (1) следует положить $k_x=k_y\equiv 0$; для круговой цилиндрической оболочки (не обязательно пологой) $k_x\equiv 0,\ k_y\equiv 1/R$, где R – радиус цилиндра.

Деформации в слое $z\neq 0$ вычисляем по формулам [2, 4, 5]:

$$\varepsilon_x^z=\varepsilon_x+z\chi_1,\ \varepsilon_y^z=\varepsilon_y+z\chi_2,\ \varepsilon_{xy}^z=\varepsilon_{xy}+2z\chi_{12},$$

где $\chi_1=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$, $\chi_2=-\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$, $2\chi_{12}=-2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$ суть функции изменения кривизны $[\chi_1=\chi_1(x,y), \chi_2=\chi_2(x,y)]$ и кручения $[\chi_{12}=\chi_{12}(x,y)]$.

Физические соотношения в соответствии с линейным вариантом наследственной теории ползучести для изотропных материалов примем в виде [18 –20]:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z\right),\ \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left(1-\Gamma^*\right)\left(\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z\right),\ \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left(1-\Gamma^*\right)\varepsilon_{xy}^z, \quad (2)$$

где E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала оболочки;

Γ^* – интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$, такой, что $\Gamma^*\varepsilon = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau$;

t – время наблюдения; τ – переменная интегрирования (время, предшествующее моменту наблюдения).

Интегрируя напряжения (2) по переменной z в пределах от $z_B = z_B(x,y)$ до $z_H = z_H(x,y)$, получаем выражения для внутренних силовых факторов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения:

- усилия растяжения (сжатия) и сдвига

$$N_x = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_x dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left[A_0\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) + A_1\left(\chi_1 + \mu\chi_2\right)\right],$$

$$N_y = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_y dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left[A_0\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) + A_1\left(\chi_2 + \mu\chi_1\right)\right], \quad (3)$$

$$N_{xy} = \int_{z_B}^{z_H} \sigma_{xy} dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{2(1-\mu)}\left[A_0\varepsilon_{xy} + 2A_1\chi_{12}\right];$$

- изгибающие и крутящий моменты [18]

$$M_x = \int_{z_b}^{z_H} \sigma_x z dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left[A_1\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right) + A_2\left(\chi_1 + \mu\chi_2\right)\right],$$

$$M_y = \int_{z_b}^{z_H} \sigma_y z dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left[A_1\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right) + A_2\left(\chi_2 + \mu\chi_1\right)\right], \quad (4)$$

$$M_{xy} = \int_{z_b}^{z_H} \sigma_{xy} z dz = \frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{2(1-\mu)}\left[A_1\varepsilon_{xy} + 2A_2\chi_{12}\right].$$

В формулах (3) и (4) $A_0 = \int_{z_b}^{z_H} dz$, $A_1 = \int_{z_b}^{z_H} z dz$ и $A_2 = \int_{z_b}^{z_H} z^2 dz$ – погонные площадь поперечного (продольного) сечения оболочки, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно.

Как известно, в случае геометрически нелинейных вязкоупругих задач для оболочек уравнения равновесия или движения, записанные в усилиях и моментах, имеют тот же вид, что и в случае геометрически линейных упругих задач [9, 10, 21, 22].

Поставим выражения (3) и (4) в известные уравнения движения оболочки [9, 10, 18, 23, 24]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;\quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \quad (5)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x} + N_y\frac{\partial w}{\partial y}\right) + q - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где $p_x = p_x(x,y,t)$, $p_y = p_y(x,y,t)$ и $q = q(x,y,t)$ – компоненты внешней механической нагрузки;

ρ – плотность материала оболочки (считаем, что в процессе деформирования $\rho \approx const$).

В результате (полагая $p_x = p_x = 0$, $q \neq 0$) получим следующую систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\Bigg\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial x}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\varepsilon_{xy}-\\
&-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)-\frac{\partial A_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg\}-\rho A_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;\\
&\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\Bigg\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\varepsilon_{xy}+\frac{\partial A_0}{\partial y}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)-\\
&-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\}-\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0; \quad (6)\\
&\frac{E(1-\Gamma^*)}{1+\mu}\Bigg\{A_1\left(\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+(1-\mu)\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}\right)+\\
&+2\frac{\partial A_1}{\partial x}\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\\
&+2\frac{\partial A_1}{\partial y}\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_x)+(1-\mu)\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}\varepsilon_{xy}-\\
&-\Bigg[A_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+\\
&+2\frac{\partial A_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y}\Bigg]\Bigg\}-\\
&-\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\Bigg\{k_x\left[A_0(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]+k_y\left[A_0(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]\Bigg\}-\\
&-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\Bigg\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial x}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\varepsilon_{xy}-\\
&-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)-\frac{\partial A_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Bigg\}-\\
&-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\Bigg\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\varepsilon_{xy}+\frac{\partial A_0}{\partial y}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)-\\
&-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Bigg\}-\\
&-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\left[A_0(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]-\\
&-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\left[A_0(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]-\\
&-2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{E(1-\Gamma^*)}{1-\mu^2}\left[A_0\varepsilon_{xy}-2A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\rho A_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q.
\end{aligned}
$$

С учетом (1) система уравнений (6) примет вид

$$
\begin{aligned}
&(1-\Gamma^*)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-(k_x+\mu k_y)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+\\
&+\frac{\partial A_0}{\partial x}\Big[\frac{\partial u}{\partial x}-(k_x+\mu k_y)w+\mu\frac{\partial v}{\partial y}++\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)-\\
&-A_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial x}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)\Big\}-\frac{(1-\mu^2)}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-\Gamma^*)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-(k_y+\mu k_x)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\Big(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Big)+\\
&+\frac{\partial A_0}{\partial y}\Big[\frac{\partial v}{\partial y}-(k_y+\mu k_x)w+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2+\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]-\\
&-A_1\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\Big)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)\Big\}-\frac{(1-\mu^2)}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0; \qquad (7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(1-\Gamma^*)\Big\{A_2\Big(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\Big)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)+2\frac{\partial A_2}{\partial x}\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big)+\\
&+2\frac{\partial A_2}{\partial y}\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\Big)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-A_1\Big[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}-\\
&-(k_x+\mu k_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial y^3}-(k_y+\mu k_x)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\\
&+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^2}+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\Big)^2+\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big)^2+(1+\mu)\Big(\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\Big)^2\Big]+\\
&+2\frac{\partial A_1}{\partial x}\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-(k_x+\mu k_y)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\\
&+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}\Big[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-(k_x+\mu k_y)w+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]+\\
&+2\frac{\partial A_1}{\partial y}\Big[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-(k_y+\mu k_x)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\\
&+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+\frac{\partial^2 A_1}{\partial y^2}\Big[\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}-(k_y+\mu k_x)w+\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2+\frac{\mu}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial x}\Big)^2\Big]+\\
&+(1-\mu)\frac{\partial^2 A_1}{\partial x\partial y}\Big[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\Big]\Big\}-(1-\Gamma^*)\Big\{A_0\Big[(k_x+\mu k_y)\frac{\partial u}{\partial x}+(k_y+\mu k_x)\frac{\partial v}{\partial y}-\\
&-(k_x^2+k_y^2+2\mu k_x k_y)w+\frac{k_y+\mu k_x}{2}\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\Big)^2\Big]-A_1\Big[(k_x+\mu k_y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+
\end{aligned}
$$

$$+\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\Big]\Big\}-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(1-\Gamma^*\right)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\Big]-$$

$$-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\Big\}-\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+\frac{\partial A_0}{\partial x}\Big[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\Big]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)-$$

$$-\frac{\partial A_1}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big\}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(1-\Gamma^*\right)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\Big]-A_1\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\}-\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\Big\{A_0\Big[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial w}{\partial y}+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial y}\Big[\frac{\partial u}{\partial y}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+$$

$$+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\Big]-A_1\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+\mu\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}\right)-(1-\mu)\frac{\partial A_1}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\Big\}-$$

$$-(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\Big\{A_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)-2A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\Big\}+\frac{1-\mu^2}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1-\mu^2}{E}q\,.$$

Следуя [25, 26], можно упростить системы уравнений (6) и (7), введя новую отсчетную поверхность $z_0=z_0(x,y)$ так удачно, чтобы $A_1=0$. В частности, положение поверхности z_0 можно определить из условия:

$$A_1=\int\limits_{Z_B^*}^{Z_H^*} z^* dz^*=0,$$

где $z^*=z-z_0$, $z_H^*=z_H-z_0$, $z_B^*=z_B-z_0$.

Отсюда получим:

$$z_0=\frac{z_H+z_B}{2}\,.$$

В этом случае при

$$A_0=\int\limits_{Z_B^*}^{Z_H^*} dz^*,\quad A_1=0,\quad A_2=\int\limits_{Z_B^*}^{Z_H^*}\left(z^*\right)^2 dz^* \quad (8)$$

система (6) обретает вид:

$$\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\Big\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\varepsilon_{xy}\Big\}-\rho A_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$

$$\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\varepsilon_{xy}+\frac{\partial A_0}{\partial y}\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)\right\}-\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0; \quad (9)$$

$$\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1+\mu}\left[A_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial A_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y}\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y}\right]-$$

$$-\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}A_0\left[\left(k_x+\mu k_y\right)\varepsilon_x+\left(k_y+\mu k_x\right)\varepsilon_y\right]-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\varepsilon_{xy}-\right.$$

$$-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}\left\{A_0\left(\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}\right)+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\varepsilon_{xy}+\frac{\partial A_0}{\partial y}\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)\right\}-$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}A_0\left(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y\right)-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}A_0\left(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x\right)--2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\frac{E\left(1-\Gamma^*\right)}{1-\mu^2}A_0\varepsilon_{xy}+\rho A_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q.$$

Система (7) с учетом (8) запишется в виде

$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial A_0}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\mu\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right\}-\frac{\left(1-\mu^2\right)}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0;$$

$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+$$

$$\left.+\frac{\partial A_0}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-\frac{\left(1-\mu^2\right)}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0; \quad (10)$$

$$\left(1-\Gamma^*\right)\left\{A_2\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+2\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right)+\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial A_2}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+2(1-\mu)\frac{\partial^2 A_2}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right\}-$$

$$-\left(1-\Gamma^*\right)A_0\left[\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x^2+k_y^2+2\mu k_x k_y\right)w+\frac{k_y+\mu k_x}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\left(1-\Gamma^*\right)A_0\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]-$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}\left(1-\Gamma^*\right)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\left(k_x+\mu k_y\right)\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+\frac{\partial A_0}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}-\left(k_x+\mu k_y\right)w+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right]\right\}-$$

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\left(1-\Gamma^*\right)A_0\left[\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]-\frac{\partial w}{\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)\left\{A_0\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}-\left(k_y+\mu k_x\right)\frac{\partial w}{\partial y}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right]+$$

$$+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial A_0}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial A_0}{\partial y}\left[\frac{\partial u}{\partial y}-\left(k_y+\mu k_x\right)w+\mu\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\}-\left(1-\mu\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\left(1-\Gamma^*\right)A_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1-\mu^2}{E}\rho A_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{1-\mu^2}{E}q.$$

Таким образом, математические модели задач динамики изотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины (асимметричные случаи) при совместном учете геометрической нелинейности и возможном развитии деформаций ползучести (вязкоупругости) построены. Они описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных вида (6), (7) и (9), (10).

Соответствующие начальные и граничные условия предполагаются заданными.

Литература

1. Жгутов В.М., Карпов В.В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 года, Сарат. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов: Изд-во Сарат. гос. ун-та, 2007. – С.121–124.
2. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4. – С. 20–23.
3. Жгутов В.М. Уравнения в смешанной форме для ребристых пологих оболочек при учете ползучести материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – № 2.– С. 63–67.
4. Жгутов В.М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года / Петербургский государственный университет путей сообщения. – СПб., 2008. – 267 с. – С.110–131.
5. Жгутов В.М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // Инженерные системы – 2008: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.341-346.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений» : Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. – М. : МОО «Пространственные конструкции», 2009.– С. 34–45.
7. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46 – 54. – Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46–54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2009_07/zhgoutov1.html.

8. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. – С. 4–12.

9. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – С. 47–54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov.html.

10. Жгутов В.М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 2. – С. 45–48. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov2.html.

11. Жгутов В.М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010.– № 2. – С. 53–59.

12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при длительных нагрузках // Популярное бетоноведение. – 2010. – № 2. – С 38–46.

13. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. – 2010.– № 5. – С. 46 – 54. – Доступ в сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_05/zhgoutov.html.

14. Верлань А.Ф., Абдикаримов Р.А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование.– 2010. – Т. 32. – С.3–14.

15. Абдикаримов Р.А. Численное исследование нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью // Проблемы архитектуры и строительства. – 2010. – №1. – С.37–42.

16. Абдикаримов Р.А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. – 2010. – №1. – С.44–47.

17. Абдикаримов Р.А., Жгутов В.М. Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 6. – С. 38–47. Доступ из сети Интернет: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_06/abdikarimov.html.

18. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М. : Наука, 1970. – 280 с.

19. Колтунов М.А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 483–488.

20. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М. : Изд–во МГУ, 1967. – 352 с.

21. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.

22. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.

23. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М. : Наука. – 1972. – 432 с.

24. Колтунов М.А. Ползучесть и релаксация. – М. : Высшая школа, 1976. – 276 с.

25. Абросимов А.А., Филиппов В.Н. Исследование НДС пластин переменной толщины в геометрически нелинейной постановке с разными системами аппроксимирующих функций // Прикладная математика и механика: Сборник научных трудов Ульяновского гос.-техн. университета. – Ульяновск : УлГТУ, 2007. – С. 3–8.

26. Добрюха Н.А., Абросимов А.А., Айрапетьянц Г.А. Исследования напряженно-деформируемого состояния гибких пологих оболочек с разными системами аппроксимирующих функций // Молодые ученые – науке и производству: Материалы конференции молодых ученых. Саратов, Саратовский гос.-техн. университет, июнь 2007 года. – Саратов, 2007. – С. 51–53.

27. Abdikarimov R.A. Deterministic Simulations of Nonlinear Vibration of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March-April 2010. Seismological Research Letters. – Vol.81. – №2. –343 p.

28. Abdikarimov R.A., Khodzhaev D.A. Deterministic Calculation of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters. – Vol.81. – №2. –343 p.

29. Bykovtsev A.S., Abdikarimov R.A., Bobanazarov Sh.P., Khodzhaev D.A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of High-Rise Special Structure // 2010 SCEC Annual Meeting, USA, September 11-15, 2010, Proceedings and Abstracts. – Volume XX. – Pp.199–200.

Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru