

Математические модели задач нелинейной динамики вязкоупругих ортотропных пластин и оболочек переменной толщины

К.т.н., профессор Р.А. Абдикаримов,
Ташкентский финансовый институт;*

К.т.н. В.М. Жгутов,

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

В последние годы в инженерной практике все большее применение находят новые композиционные материалы. Проектирование и последующее создание легких, но вместе с тем прочных и надежных конструкций требует дальнейшего совершенствования механических моделей деформируемых тел, а также разработки новых интегральных методов их расчета с учетом проявления реальных свойств конструкционных материалов, из которых одним из основных является свойство ползучести (вязкоупругости).

Тонкостенные элементы современной конструкции в виде пластин и оболочек предназначены для работы под воздействием силовых нагрузок (которые могут быть как статическими, так и динамическими). Для придания в нужных местах большей жесткости профиль тонких пластин или оболочек может иметь плавные утолщения. Следовательно, всю конструкцию следует рассматривать как конструкцию переменной (точнее, гладко-переменной) толщины. Зачастую в тонкостенных элементах возникают достаточно большие прогибы (даже при не очень значительных воздействиях). При длительных нагрузках в материале пластин и оболочек может проявиться свойство ползучести (вязкоупругости), что приведет к существенному снижению их несущей способности.

Расчеты на прочность, колебания и устойчивость описанных конструкций играют важную роль при проектировании современных зданий и сооружений.

Таким образом, для получения более адекватной картины напряженно-деформированного состояния (НДС) указанных элементов необходимо проводить исследования в геометрически нелинейной постановке и с учетом вязкоупругих свойств материала одновременно (что связано с большими математическими и вычислительными трудностями).

Исследованию устойчивости оболочек постоянной и ступенчато-переменной толщины (ребристых оболочек) в геометрически нелинейной постановке при учете ползучести материала посвящены работы В.М. Жгутова [1–13]. В работах Р.А. Абдикаримова [14–16, 23–25] рассмотрены аналогичные задачи о колебаниях и динамической устойчивости вязкоупругих изотропных пластин и оболочек переменной толщины.

Однако при оптимальном проектировании неизбежно возникает вопрос учета также и ортотропных свойств материала конструкции.

Тем не менее, поведение ортотропных пластин и оболочек гладко-переменной толщины при совместном учете отмеченных важных факторов в настоящее время исследовано недостаточно и требует дальнейшего изучения.

В свете изложенного разработка новых математических моделей и эффективных вычислительных алгоритмов решения нелинейных динамических задач о колебаниях и устойчивости ортотропных вязкоупругих систем с переменной жесткостью представляется актуальной и важной.

Рассмотрим сначала пологую оболочку на прямоугольном плане. Срединную поверхность оболочки толщины h принимаем за отсчетную поверхность $z=0$. Координатные линии x и y криволинейной ортогональной системы координат направляем по линиям кривизны, а ось z – по внутренней нормали срединной поверхности так, чтобы система координат x, y, z была право-ориентированной. (Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на срединной поверхности не имеет особенностей).

Толщину оболочки задаем с помощью функции $h = h(x, y) \in C^k$. [Принадлежность функции классу гладкости C^k означает, что функция имеет непрерывные частные производные до порядка k включительно (запись $h(x, y) \in C^0$ требует только непрерывности по совокупности аргументов)].

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении ее контура.

Основываясь на кинематической гипотезе Кирхгофа-Лява, будем совместно учитывать геометрическую нелинейность и возможность развития деформации ползучести (вязкоупругости) в материале.

Для описания процесса ползучести используем линейный вариант наследственной ползучести (широко применяемый в механике полимеров и для нестарееющего бетона), представляющий собой частный случай теории упругоползучего тела.

Известно, что математическая модель деформирования оболочки (или пластины) включает в себя геометрические соотношения (выражения деформаций через перемещения), физические соотношения (связь напряжений и деформаций), а также функционал полной энергии деформации (или действия), условие стационарности которого эквивалентно уравнениям равновесия или движения.

Геометрические соотношения в срединной поверхности $z=0$ получаются с помощью операции ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - k_x w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - k_y w + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad (1)$$

где ε_x , ε_y и γ_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x , y и сдвига в касательной плоскости (dx, dy) ; u, v и w – компоненты вектора перемещений (перемещения) точек вдоль осей x , y и z соответственно; $k_x = 1/R_1$ и $k_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно.

Деформации в слое $z \neq 0$, эквидистантном срединной поверхности, вычисляем по формулам [2, 4, 5]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где $\chi_1 = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$; $\chi_2 = -\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$; $2\chi_{12} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ – суть функции изменения кривизны и кручения.

Физические соотношения для ортотропных материалов в соответствии с линейным вариантом наследственной ползучести примем в виде [17–19]:

$$\sigma_x = B_{11}(1 - \Gamma_{11}^*)\varepsilon_x^z + B_{12}(1 - \Gamma_{12}^*)\varepsilon_y^z, \quad \sigma_y = B_{22}(1 - \Gamma_{22}^*)\varepsilon_y^z + B_{21}(1 - \Gamma_{21}^*)\varepsilon_x^z, \quad \sigma_{xy} = B(1 - \Gamma^*)\gamma_{xy}^z. \quad (2)$$

Здесь:

1) Γ_{11}^* , Γ_{12}^* , Γ_{21}^* , Γ_{22}^* , Γ^* – интегральные операторы интегральных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^* \varphi(t) &= \int_0^t \Gamma_{11}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, & \Gamma_{12}^* \varphi(t) &= \int_0^t \Gamma_{12}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \\ \Gamma_{21}^* \varphi(t) &= \int_0^t \Gamma_{21}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, & \Gamma_{22}^* \varphi(t) &= \int_0^t \Gamma_{22}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\Gamma^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau,$$

где $\Gamma_{11}(t-\tau)$, $\Gamma_{12}(t-\tau)$, $\Gamma_{21}(t-\tau)$, $\Gamma_{22}(t-\tau)$, $\Gamma(t-\tau)$ – ядра релаксации (соответствующие одноосному напряженному состоянию); t – время, τ – переменная интегрирования (имеющая смысл времени);

2) B_{11} , B_{12} , B_{22} , B – упругие постоянные, выраженные через технические постоянные [19]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1 - \mu_1 \mu_2}, \quad B_{12} = \frac{\mu_2 E_1}{1 - \mu_1 \mu_2} = \frac{\mu_1 E_2}{1 - \mu_1 \mu_2} = B_{21}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1 - \mu_1 \mu_2}, \quad 2B = G,$$

где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – модули упругости и коэффициенты Пуассона (при этом $E_1 \mu_2 = E_2 \mu_1$); G – модуль сдвига.

Интегрируя напряжения (2) по переменной z в пределах от $-h/2$ до $h/2$, получаем выражения для внутренних силовых факторов, приведенных к срединной поверхности оболочки и приходящихся на единицу длины сечения:

- усилия растяжения (сжатия) и сдвига

$$N_x = B_{11}h(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}h(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y, \quad N_y = B_{21}h(1-\Gamma_{21}^*)\varepsilon_x + B_{22}h(1-\Gamma_{22}^*)\varepsilon_y, \quad (3)$$

$$N_{xy} = 2Bh(1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy};$$

- изгибающие и крутящий моменты [17]

$$M_x = \frac{h^3}{12} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\chi_1 + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\chi_2], \quad M_y = \frac{h^3}{12} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\chi_1 + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)\chi_2] \quad (4)$$

$$M_{xy} = \frac{Bh^3}{6} (1-\Gamma^*)\chi_{12}.$$

Известно, что в случае геометрически нелинейных вязкоупругих задач для оболочек уравнения равновесия или движения, записанные в усилиях и моментах, имеют тот же вид, что и в случае геометрически линейных упругих задач [9, 10, 20, 21].

Поставим выражения (3) и (4) в известные уравнения движения оболочки [9, 10, 22]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + k_x N_x + k_y N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

где p_x , p_y и q – компоненты внешней механической нагрузки (являющиеся не только функциями внутренних координат x и y , но и времени t); ρ – плотность материала оболочки (считающаяся неизменной в процессе деформирования).

В результате получим следующую систему уравнений

$$h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] +$$

$$+ \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy} - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] +$$

$$+ 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)\varepsilon_y] - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$D \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right.$$

$$+ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \left. \right] + \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \left(B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) +$$

$$+ 2 \frac{\partial D}{\partial x} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] +$$

$$+ 2 \frac{\partial D}{\partial y} \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \left(B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 8 \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - h k_x \{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y \} - h k_y \{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y \} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial y} \right] + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial x} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] + 2B \frac{\partial h}{\partial y} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} \right\} - \\
& \quad - h \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} [B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \varepsilon_x + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \varepsilon_y] - \\
& - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x} \right] + \right. \\
& \quad \left. + 2B \frac{\partial h}{\partial x} (1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \frac{\partial h}{\partial y} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] \right\} - \\
& - h \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \varepsilon_x + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \varepsilon_y] - 4h \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} B(1-\Gamma^*) \varepsilon_{xy} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q,
\end{aligned}$$

$$\text{где } D = \frac{h^3}{12}.$$

Уравнению (6) целесообразно придать следующий вид:

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - [k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)] \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + [B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \\
& \quad + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
& \quad \left. - [k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)] w \right\} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& h \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - [k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)] \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
& \quad \left. + [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + \\
& \quad + 2 \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - [k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)] w \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
 & \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left(B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
 & \times \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times \\
 & \times \left(B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
 & - h \left\{ (k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial u}{\partial x} + (k_x B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)) \frac{\partial v}{\partial y} - \right. \\
 & \left. - (k_x^2 B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_x k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + k_x k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + k_y^2 B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)) w + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} (k_x B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} - \\
 & - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)) \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)) w \right\} + 2 \frac{\partial h}{\partial y} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
 & - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
 & \left. - (k_x B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) + k_y B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)) w \right\} - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - (k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)) \frac{\partial w}{\partial y} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + 2 \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \right. \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\left(k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\right)w \Bigg\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \\
& -\left(k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_x B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\right)w \Bigg\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \\
& -4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
\end{aligned}$$

Уравнение (7) описывает движение ортотропной оболочки с переменной жесткостью. Оно учитывает геометрическую нелинейность и возможность развития процесса ползучести (вязкоупругости) в материале оболочки.

Ниже показано, что из уравнения (7), как частные случаи, можно получить уравнения движения ортотропных вязкоупругих пластин, пологих и цилиндрических оболочек как постоянной ($h(x, y) \equiv const$), так и переменной толщины.

1⁰. Для ортотропной вязкоупругой пластины следует положить $k_x = k_y \equiv 0$. Тогда при $h = h(x, y)$ получаем:

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + [B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} + \\
& + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \Bigg\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \\
& h \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + [B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \Bigg] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left(B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
& \times \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& \quad - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \right. \quad (8) \\
& \quad \left. - (k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) w \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
\end{aligned}$$

2⁰. Для ортотропной вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки (не обязательно пологой!) следует положить $k_x \equiv 0$, $k_y \equiv 1/R$, где R – радиус цилиндра. В этом случае при $h = h(x, y)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{R} B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \\
& \quad \left. + [B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \\
& \quad + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{R} B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) w \right\} + \\
& \quad + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{R} B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial w}{\partial y} + \right. \\
& + \left[B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 2B(1-\Gamma^*) \right] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \right. \\
& + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{1}{R} B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) w \left. \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0; \\
& \frac{h^3}{12} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B(1-\Gamma^*) + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \left. \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left(B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
& + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
& \times \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + 4B(1-\Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times \\
& \times \left(B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - h \left\{ \frac{1}{R} B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R^2} B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) w + \right. \\
& + \frac{1}{2R} B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2R} B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left. \right\} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{R} B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \frac{\partial w}{\partial x} + \right. \right. \\
& + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \left. \right] + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right. \\
& - \frac{1}{R} B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) w \left. \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right\} - \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{R} B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) w \left. \right\} - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \right. \right. \\
& - \frac{1}{R} B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial w}{\partial y} + (B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + B (1 - \Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \\
& + B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left. \right] + \frac{\partial h}{\partial x} B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] - \right. \quad (9) \\
& \left. - \frac{1}{R} B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) w \right\} \left. \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] - \frac{1}{R} B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) w \right\} - \\
& - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q.
\end{aligned}$$

Таким образом, математические модели динамики ортотропных пластин и оболочек гладко-переменной жесткости при совместном учете геометрической нелинейности и возможном развитии деформаций ползучести (вязкоупругости) построены. Они описываются интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных вида (7) – (9). Соответствующие начальные и граничные условия предполагаются заданными.

Литература

1. Жгутов В. М., Карпов В. В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 года, Саратов. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов: Изд-во Саратов. гос. ун-та, 2007. – 316 с. – С.121–124.
2. Жгутов В. М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007. – № 4. – С.20-23.
3. Жгутов В. М. Уравнения в смешанной форме для ребристых пологих оболочек при учете ползучести материала // Строительная механика и расчет сооружений. – 2008. – № 2. – С. 63–67.
4. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб.: Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. – 267 с. – С.110-131.
5. Жгутов В. М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – 380 с. – С.341-346.
6. Жгутов В. М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. – М.: МОО «Пространственные конструкции», 2009. – С. 34–45.

7. Жгутов В. М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7. – С. 46–54.
8. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. – С. 4–12.
9. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 1. – С. 47–54.
10. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 2. – С. 45–48.
11. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010. – № 2. – С. 53–59.
12. Жгутов В. М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при длительных нагрузках // Популярное бетоноведение. – 2010. – № 2. – С 38–46.
13. Жгутов В. М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках // Инженерно-строительный журнал. – 2010. – № 5. – С. 46 – 54.
14. Верлань А. Ф., Абдикаримов Р. А., Эшматов Х. Численное моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем с переменной жесткостью // Электронное моделирование. Т. 32. – Киев, 2010 – С. 3-14.
15. Абдикаримов Р. А. Численное исследование нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью // Проблемы архитектуры и строительства. – Самарканд, 2010. – №1. – С. 37-42.
16. Абдикаримов Р. А. Математическая модель нелинейного колебания вязкоупругой пластины с переменной жесткостью при различных граничных условиях // Проблемы архитектуры и строительства. – Самарканд, 2010. – № 1. – С.44-47.
17. Ильющин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. – М. : Наука, 1970. – 280 с.
18. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации // Механика полимеров. – 1966. – №4. – С. 483–488.
19. Огибалов П. М., Колтунов М. А. Оболочки и пластины. – М. : Изд-во МГУ, 1967. – 352 с.
20. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
21. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
22. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М. : Наука. – 1972. – 432 с.
23. Abdikarimov R. A. Deterministic Simulations of Nonlinear Vibration of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters. Vol.81, N.2, pp.343.
24. Abdikarimov R. A., Khodzhaev D. A. Deterministic Calculation of Dynamic Stability of Viscoelastic Elements in Thin-Walled Constructions with Variable Rigidity // 2010 SSA Annual Meeting, USA, March/April 2010, Seismological Research Letters. Vol. 81, N.2, pp.343.
25. Bykovtsev A. S., Abdikarimov R. A., Bobanazarov Sh.P., Khodzhaev D.A. Nonlinear Vibration and Dynamic Stability of High-Rise Special Structure // 2010 SCEC Annual Meeting, USA, September 11-15, 2010, Proceedings and Abstracts. Volume XX, pp.199-200.

* *Рустамхан Алимханович Абдикаримов, г. Ташкент, Узбекистан*

Тел. раб.: (+99371)234-66-41; эл. почта: rabdikarimov@mail.ru