

## Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

К.т.н. В.М. Жгутов\*,

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Известно, что при исследовании напряженно-деформированного состояния (НДС) и устойчивости оболочек, находящихся под действием длительных нагрузок, важно учитывать, что с течением времени в материале может проявиться свойство ползучести, что приведет к снижению критических нагрузок, найденных при упругом поведении материала [1–5, 7–10].

Рассматриваем оболочки общего вида (пологие прямоугольного плана и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также некоторые другие оболочки).

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной  $h$  принимаем за отсчетную поверхность  $z=0$ . Полагаем, что оси  $x$  и  $y$  криволинейной ортогональной системы координат ( $-a/2 \leq x \leq a/2; -b/2 \leq y \leq b/2$ ) направлены по линиям кривизны отсчетной поверхности (параллелям и меридианам в случае оболочки вращения), а ось  $z$  – по нормали к поверхности  $z=0$  в сторону ее вогнутости.

Со стороны вогнутости оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра задаем дискретно с помощью функции  $H=H(x,y)$ , характеризующей распределение ребер по оболочке и их высоту [4, 6]. Таким образом,  $-h/2 \leq z \leq h/2 + H$ .

Считаем, что оболочка находится под действием механической нагрузки при определенном закреплении её контура.

Учитываем геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, поперечные сдвиги, возможность развития деформаций ползучести при длительной нагрузке.

Геометрические соотношения в отсчетной поверхности  $z=0$  с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{A} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} V - K_x W + \frac{1}{2} \theta_1^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{B} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} U - K_y W + \frac{1}{2} \theta_2^2; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{A} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} U + \frac{\partial B}{\partial x} V \right) + \theta_1 \theta_2,\end{aligned}$$

где  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  – деформации удлинения вдоль осей  $x$ ,  $y$  и сдвига в касательной плоскости  $(dx, dy)$ ;  $U$ ,  $V$  и  $W$  – компоненты вектора перемещений точек вдоль осей  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно;  $A$  и  $B$  – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например,  $A=B=1$  для пологой оболочки и  $A=const$ ,  $B=B(x)$  в случае оболочки вращения);  $K_x = 1/R_1$ ,  $K_y = 1/R_2$  – главные кривизны ( $R_1$ ,  $R_2$  – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;

$$\theta_1 = -\left( \frac{1}{A} \frac{\partial W}{\partial x} + K_x U \right); \quad \theta_2 = -\left( \frac{1}{B} \frac{\partial W}{\partial y} + K_y V \right).$$

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz} = cf(z)(\psi_x - \theta_1); \quad \gamma_{yz} = cf(z)(\psi_y - \theta_2).$$

Здесь  $\psi_x$  и  $\psi_y$  – углы поворота отрезка нормали в плоскостях  $(dx, dz)$  и  $(dy, dz)$  соответственно;  $f(z)$  – функция, характеризующая распределение напряжений  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{yz}$  вдоль оси  $z$ ;  $c$  – константа.

Будем полагать, что  $f(z)$  имеет вид [4, 6]

$$f(z) = -\frac{6}{(h+H)^2} \left( z + \frac{h}{2} \right) \left( z - \frac{h}{2} - H \right).$$

Эта функция при  $z = -h/2$  и  $z = h/2 + H$  обращается в нуль и удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f(z) dz = 1; \quad \frac{1}{h+H} \int_{-h/2}^{h/2+H} f^2(z) dz = \frac{1}{c} \quad (c = 5/6).$$

Перемещения в слое  $z \neq 0$  определяем по формулам

$$U^z = U + z\psi_x, \quad V^z = V + z\psi_y, \quad W^z = W,$$

откуда для деформаций в слое  $z \neq 0$  получаем соотношения в виде

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x + z\chi_1, \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y + z\chi_2, \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} + 2z\chi_{12},$$

где  $\chi_1$ ,  $\chi_2$  и  $\chi_{12}$  – функции изменения кривизны и кручения, определяемые по формулам:

$$\chi_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial y} \psi_y; \quad \chi_2 = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial x} \psi_x;$$

$$2\chi_{12} = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi_y}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial \psi_x}{\partial y} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial y} \psi_x + \frac{\partial B}{\partial x} \psi_y \right).$$

Физические соотношения для упругих оболочек в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu\varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu\varepsilon_x^z); \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z, \quad (1)$$

где  $E$  и  $\mu$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона для данного материала.

Кроме того, при учете поперечных сдвигов

$$\tau_{xz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xz}; \quad \tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz}. \quad (2)$$

Ползучесть материала будем учитывать на основе линейной наследственной теории (широко применяемой в механике полимеров и для старого бетона).

Физические соотношения в этом случае могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^c, \quad \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^c, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c, \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}^e - \tau_{yz}^c,$$

где упругие составляющие напряжений (отмечены индексом «е»), определяются с помощью формул (1) и (2), а составляющие напряжений, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «с»), имеют вид

$$\sigma_x^c = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_x^z(\tau) + \mu\varepsilon_y^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau; \quad \sigma_y^c = \frac{E}{1-\mu^2} \int_{t_0}^t [\varepsilon_y^z(\tau) + \mu\varepsilon_x^z(\tau)] R_1(t, \tau) d\tau;$$

$$\tau_{xy}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xy}^z(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad \tau_{xz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{xz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau; \quad \tau_{yz}^c = \frac{E}{2(1+\mu)} \int_{t_0}^t \gamma_{yz}(\tau) R_2(t, \tau) d\tau.$$

Здесь  $R_1(t, \tau)$  и  $R_2(t, \tau)$  – функции влияния при растяжении (сжатии) и сдвиге соответственно;  $t$  – время наблюдения;  $\tau$  – время, предшествующее моменту наблюдения.

Функции влияния для полимерных материалов (в частности, оргстекла) могут быть взяты в виде [3, 5, 8-12]

$$R_l(t, \tau) = A_l e^{-\beta_l(t-\tau)} \cdot (t-\tau)^{\alpha_l-1},$$

где  $A_l$ ,  $\alpha_l$ ,  $\beta_l$  – константы, определяемые экспериментально ( $1 \leq l \leq 2$ ).

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

Функционал Э полной энергии деформации оболочки для задач статики представляет собой разность потенциальной энергии П и работы внешних сил  $A^E$ :

$$\mathcal{E} = \Pi - A^E,$$

где

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy} \gamma_{xy}^z + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}] d\Omega$$

$$A^E = \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS.$$

Здесь  $P_x$ ,  $P_y$  и  $q$  – компоненты внешней нагрузки в направлении осей  $x$ ,  $y$  и  $z$ ;  $\Omega$  – область в пространстве  $(x, y, z)$ ;  $S$  – область в плоскости  $(x, y)$ ;  $d\Omega$  и  $dS$  – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ( $d\Omega = ABdx dy dz$ ;  $dS = ABdx dy$ ).

Представим функционал Э в виде [5, 7–10]

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^e - \mathcal{E}^c, \quad (3)$$

где функционал

$$\mathcal{E}^e = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^e \varepsilon_x^z + \sigma_y^e \varepsilon_y^z + \tau_{xy}^e \gamma_{xy}^z + \tau_{xz}^e \gamma_{xz} + \tau_{yz}^e \gamma_{yz}] d\Omega - \iint_S (P_x U + P_y V + qW) dS \quad (4)$$

соответствует линейно упругой постановке задачи, а функционал

$$\mathcal{E}^c = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\sigma_x^c(t) \varepsilon_x^z(t) + \sigma_y^c(t) \varepsilon_y^z(t) + \tau_{xy}^c(t) \gamma_{xy}^z(t) + \tau_{xz}^c(t) \gamma_{xz}(t) + \tau_{yz}^c(t) \gamma_{yz}(t)] d\Omega \quad (5)$$

описывает процесс развития ползучести.

После интегрирования в функционале (4) по переменной  $z$  будем иметь

$$\mathcal{E}^e = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \times \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ (h + \bar{F}) [\varepsilon_x^2 + 2\mu \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y^2 + \mu_1 \gamma_{xy}^2 + \mu_1 c(\psi_x - \theta_1)^2 + \mu_1 c(\psi_y - \theta_2)^2] + \right.$$

$$\left. + 2\bar{S} (\varepsilon_x \chi_1 + \mu \varepsilon_x \chi_2 + \varepsilon_y \chi_2 + \mu \varepsilon_y \chi_1 + 2\mu_1 \gamma_{xy} \chi_{12}) \right\} +$$

$$\left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1^2 + 2\mu \chi_1 \chi_2 + \chi_2^2 + 4\mu_1 \chi_{12}^2) - \frac{2(1-\mu^2)}{E} (P_x U + P_y V + qW) \Big\} dS,$$

где  $\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz$ ;  $\bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz$ ;  $\bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz$  – жесткостные характеристики ребер.

Для функционала (5) далее имеем:

$$\mathcal{E}^c(t) = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \varepsilon_x(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F}) (\varepsilon_x(\tau) + \mu \varepsilon_y(\tau)) + \bar{S} (\chi_1(\tau) + \mu \chi_2(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \right.$$

$$\left. + \chi_1(t) \int_{t_0}^t \left[ \bar{S} (\varepsilon_x(\tau) + \mu \varepsilon_y(\tau)) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(\tau) + \mu \chi_2(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon_y(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F})(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \bar{S}(\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau))] R_1(t, \tau) d\tau + \\
& + \chi_2(t) \int_{t_0}^t \left[ \bar{S}(\varepsilon_y(\tau) + \mu\varepsilon_x(\tau)) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(\tau) + \mu\chi_1(\tau)) \right] R_1(t, \tau) d\tau + \\
& + \mu_1 \gamma_{xy}(t) \int_{t_0}^t [(h + \bar{F})\gamma_{xy}(\tau) + 2\bar{S}\chi_{12}(\tau)] R_2(t, \tau) d\tau + 2\mu_1 \chi_{12}(t) \int_{t_0}^t \left[ \bar{S}\gamma_{xy}(\tau) + 2\left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(\tau) \right] R_2(t, \tau) d\tau + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_x(t) - \theta_1(t)) \int_{t_0}^t (\psi_x(\tau) - \theta_1(\tau)) R_2(t, \tau) d\tau + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_y(t) - \theta_2(t)) \int_{t_0}^t (\psi_y(\tau) - \theta_2(\tau)) R_2(t, \tau) d\tau \} dS.
\end{aligned}$$

Интеграл по переменной  $\tau$  на интервале  $[t_0, t_k]$  разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам  $[t_{i-1}, t_i]$  длиной  $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 1$  сут. каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников. В результате получим

$$\begin{aligned}
\Theta_c(t_k) = & \frac{E}{2(1 - \mu^2)} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \varepsilon_x(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1}))] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_1(t_k) \sum_{i=1}^k \left[ \bar{S}(\varepsilon_x(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_y(t_{i-1})) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_1(t_{i-1}) + \mu\chi_2(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \varepsilon_y(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \bar{S}(\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1}))] R1_{k,i-1} + \\
& + \chi_2(t_k) \sum_{i=1}^k \left[ \bar{S}(\varepsilon_y(t_{i-1}) + \mu\varepsilon_x(t_{i-1})) + \left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) (\chi_2(t_{i-1}) + \mu\chi_1(t_{i-1})) \right] R1_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 \gamma_{xy}(t_k) \sum_{i=1}^k [(h + \bar{F})\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\bar{S}\chi_{12}(t_{i-1})] R2_{k,i-1} + \\
& + 2\mu_1 \chi_{12}(t_k) \sum_{i=1}^k \left[ \bar{S}\gamma_{xy}(t_{i-1}) + 2\left( \frac{h^3}{12} + \bar{J} \right) \chi_{12}(t_{i-1}) \right] R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_x(t_k) - \theta_1(t_k)) \sum_{i=1}^k (\psi_x(t_{i-1}) - \theta_1(t_{i-1})) R2_{k,i-1} + \\
& + \mu_1 c(h + \bar{F})(\psi_y(t_k) - \theta_2(t_k)) \sum_{i=1}^k (\psi_y(t_{i-1}) - \theta_2(t_{i-1})) R2_{k,i-1} \} dS ;
\end{aligned}$$

Здесь

$$R1_{k,i-1} = R_1(t_k, t_{i-1})\Delta t; \quad R2_{k,i-1} = R_2(t_k, t_{i-1})\Delta t. \quad (6)$$

При  $t = t_0$  решением исходной задачи является решение упругой задачи.

Заметим, что при нахождении момента времени  $t = t_K$ , при котором происходит потеря устойчивости оболочки вследствие ползучести, конкретное значение  $K$ , принимаемое индексом  $k$  (пробегающим значения 1, 2, ...,  $K$ ), заранее неизвестно. В процессе изменения индекса  $k$  ( $1 \leq k \leq K$ ) вместе со значениями (6) будем

пересчитывать все значения, соответствующие функционалу  $\mathcal{E}_c$  в полученном ниже расчетном уравнении (7) [11, 12].

Для отыскания минимума энергии (3) применяем метод Ритца при разложении искомых функций  $U(x, y)$ ,  $V(x, y)$ ,  $W(x, y)$ ,  $\psi_x(x, y)$ ,  $\psi_y(x, y)$  в виде

$$U = \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I); \quad V = \sum_{I=1}^N V(I)X2(I)Y2(I); \quad W = \sum_{I=1}^N U(I)X1(I)Y1(I);$$

$$\Psi_x = \sum_{I=1}^N PS(I)X4(I)Y4(I); \quad \Psi_y = \sum_{I=1}^N PN(I)X5(I)Y5(I),$$

где  $U(I)$ ,  $V(I)$ ,  $W(I)$ ,  $PS(I)$ ,  $PN(I)$  – неизвестные параметры переменной  $t$ , подлежащие определению;  $X1(I)Y1(I), \dots, X5(I)Y5(I)$  – известные аппроксимирующие функции переменных  $x$  и  $y$ , удовлетворяющие заданным краевым условиям.

В результате получаем нелинейную систему алгебраических уравнений, которую кратко можно записать в виде [5, 7 – 12]

$$F_n(X) - fq = -F_n(X) + F_c(X), \quad (7)$$

где  $X = [U(I), V(I), W(I), PS(I), PN(I)]^T$ ;  $fq$  – нагрузочный член ( $f$  – коэффициент);  $F_n(X)$  и  $F_n(X)$  – линейная и нелинейная (геометрически) части системы (7), соответствующие функционалу  $\mathcal{E}^e$ ;  $F_c(X)$  – часть (7), отвечающая функционалу  $\mathcal{E}_c$ .

Начальным приближением  $X_0$  в этом случае служит решение упругой или упругопластической задачи.

Далее, решаем систему (7) методом итераций:

$$F_n(X_i) - fq = -F_n(X_{i-1}) + F_c(\bar{X}_{i-1}),$$

где  $\bar{X}_{i-1} = \sum_{k=0}^{i-1} X_k$ .

Процесс продолжаем по времени  $t$  до критического его значения  $t_{kp} = t_K$ , отвечающего резкому возрастанию прогибов (в какой-либо характерной точке оболочки, например, ее центре, или четверти) при заданном значении нагрузки  $q$ . Так может быть получена зависимость дальнейшего снижения критической нагрузки, найденной в момент времени  $t=0$ .

Приведем некоторые результаты для пологих оболочек (на прямоугольном плане), выполненных из оргстекла.

Для удобства представления и анализа результатов функционал (3) был записан в безразмерных параметрах, описанных в [4, 6], в частности: безразмерных координатах  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$ ; безразмерных кривизнах  $k_\xi = a^2 K_x / h$ ,  $k_\eta = b^2 K_y / h$ ; безразмерных перемещениях  $\bar{U} = aU / h^2$ ,  $\bar{V} = bV / h^2$ ,  $\bar{W} = W / h$  и углах  $\bar{\psi}_x = a\psi_x / h$ ,  $\bar{\psi}_y = b\psi_y / h$ ; безразмерной нагрузке  $\bar{P} = a^4 q / Eh^4$ ; безразмерной интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}_i = \frac{a^2}{Eh^2} \sigma_i$ , где  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$ .

Варианты и соответствующие параметры проанализированных пологих оболочек представлены в табл. 1.

**Таблица 1. Параметры проанализированных оболочек**

Вариант оболочки	Параметры оболочки			Возможные реальные размеры, м		
	$a = b$	$R_1 = R_2$	$k_\xi = k_\eta$	$a = b$	$R_1 = R_2$	$h$
I	$60h$	$225h$	16	18	67,5	0,3
II	$100h$	$251h$	40	18	45,3	0,18
III	$200h$	$503h$	79,5	18	45,3	0,09
IV	$600h$	$1510h$	238	18	45,3	0,03

Для каждого варианта рассматривались как гладкие оболочки (с числом ребер  $N_p = 0$ ), так и ребристые оболочки при числе подкрепляющих ребер  $N_p = 6$  и  $N_p = 18$ .

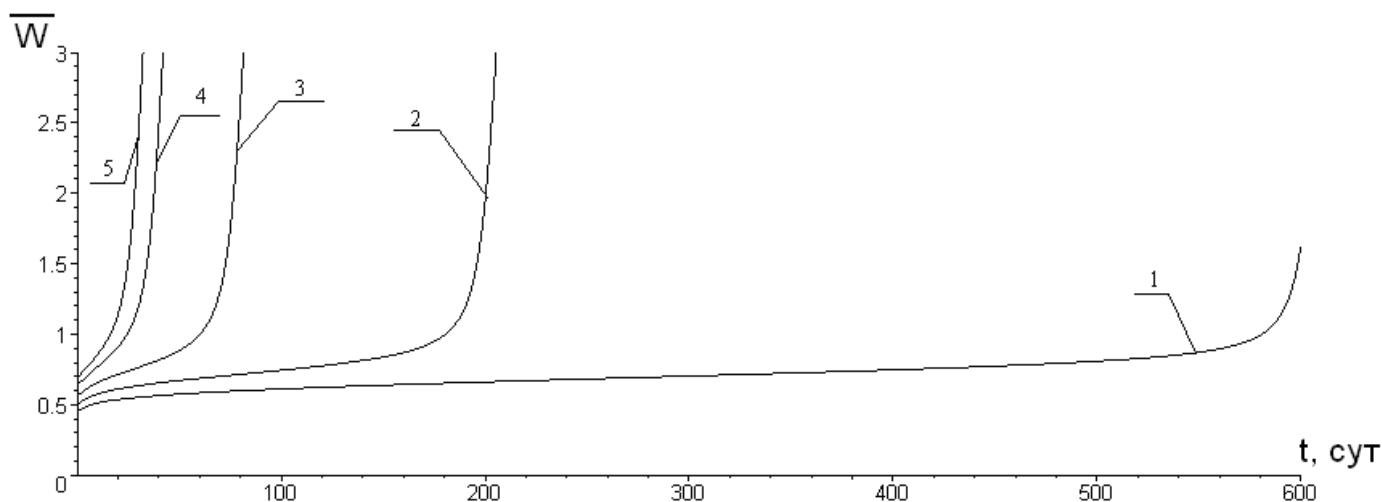
Считалось, что ребра расставлены равномерно вдоль координатных линий  $x$  и  $y$  соответственно по 3 ребра либо по 9 ребер в каждом из указанных направлений. Высота ребер принималась  $3h$ ; ширина ребер полагалась равной  $2h$ ,  $3,3h$ ,  $6,6h$  и  $20h$  соответственно для вариантов оболочек I, II, III и IV.

Кроме того, при проведении расчетов предполагалось, что:

- 1) продольные составляющие нагрузки  $P_x = P_y = 0$ , а поперечная нагрузка  $q$  равномерно распределена ( $q = \text{const}$ );
- 2) контур оболочки закреплен шарнирно-неподвижным способом;
- 3) число членов разложения в методе Ритца  $N = 9$ ;
- 4) коэффициент Пуассона для оргстекла [3, 12]  $\mu = 0,354$ ;
- 5) экспериментальные параметры [3, 12]  $\alpha_1 = 0,05$ ;  $\beta_1 = 0,045 \cdot 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$ ;  $A_1 = 0,026945 \text{ сут.}^{1-\alpha_1}$ ;  $\alpha_2 = 0,20$ ;  $\beta_2 = 0,833 \cdot 10^{-3} \text{ сут.}^{-1}$ ;  $A_2 = 0,013184 \text{ сут.}^{1-\alpha_2}$ .

На рис. 1 – 4 в качестве примеров приведены зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(\xi, \eta)$  – время наблюдения  $t$ » для гладких оболочек варианта I–IV.

Для оболочки варианта I (рис. 1) кривые 1–5 построены для точки, расположенной в четверти ( $\xi = \pm 0,25; \eta = \pm 0,25$ ), при значениях безразмерной нагрузки  $\bar{P} = 150$ ,  $\bar{P} = 160$ ,  $\bar{P} = 170$ ,  $\bar{P} = 180$  и  $\bar{P} = 185$  соответственно.



**Рисунок 1. Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(\pm 0,25; \pm 0,25)$  – время  $t$ » для гладкой оболочки варианта I. Кривые 1 – 5 построены при значениях безразмерных нагрузок  $\bar{P} = 150$ ,  $\bar{P} = 160$ ,  $\bar{P} = 170$ ,  $\bar{P} = 180$  и  $\bar{P} = 185$  соответственно**

Для центральной точки ( $\xi = 0; \eta = 0$ ) оболочки варианта II (рис. 2) кривым 1–5 отвечают нагрузки  $\bar{P} = 900$ ,  $\bar{P} = 950$ ,  $\bar{P} = 1000$ ,  $\bar{P} = 1050$  и  $\bar{P} = 1100$ .

Для центральной точки оболочки варианта III (рис. 3) кривые 1–5 получены при нагрузках  $\bar{P} = 4000$ ,  $\bar{P} = 4500$ ,  $\bar{P} = 4800$ ,  $\bar{P} = 5000$  и  $\bar{P} = 5100$ .

Для оболочки варианта IV (рис. 4) кривые 1 – 5 приведены для точки, расположенной в четверти, и отвечают значениям нагрузок  $\bar{P} = 55000$ ,  $\bar{P} = 60000$ ,  $\bar{P} = 68000$ ,  $\bar{P} = 70000$  и  $\bar{P} = 71000$  соответственно.

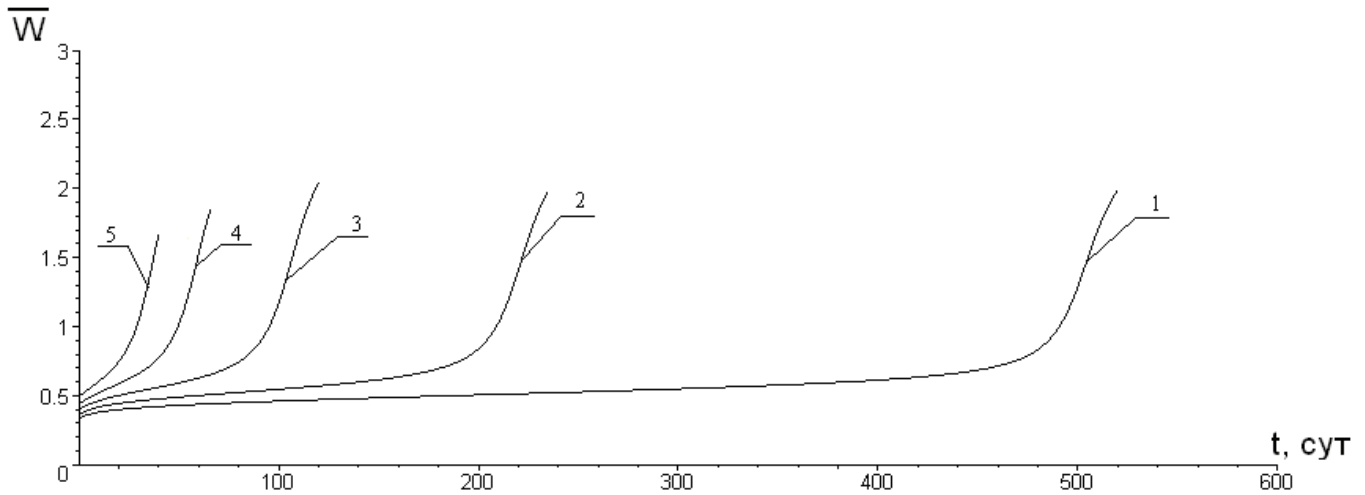


Рисунок 2. Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(0;0)$  – время  $t$ » для гладкой оболочки варианта II.  
Кривым 1 – 5 отвечают нагрузки  $\bar{P} = 900$ ,  $\bar{P} = 950$ ,  $\bar{P} = 1000$ ,  $\bar{P} = 1050$  и  $\bar{P} = 1100$

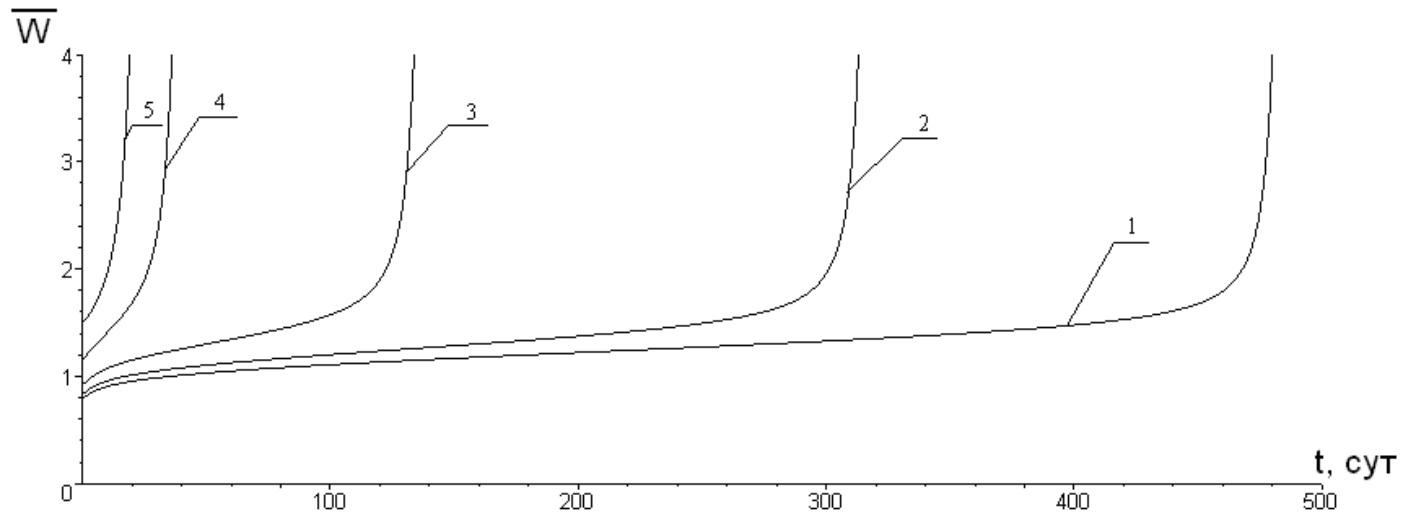


Рисунок 3. Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(0;0)$  – время  $t$ » для гладкой оболочки варианта III.  
Кривые 1 – 5 получены при нагрузках  $\bar{P} = 4000$ ,  $\bar{P} = 4500$ ,  $\bar{P} = 4800$ ,  $\bar{P} = 5000$  и  $\bar{P} = 5100$

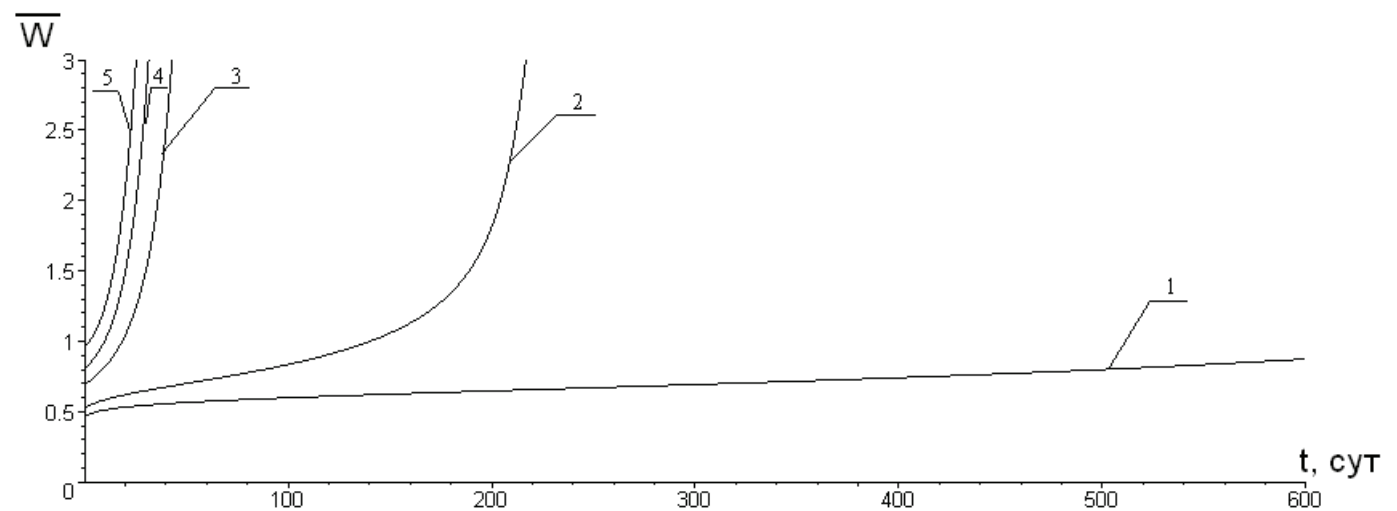
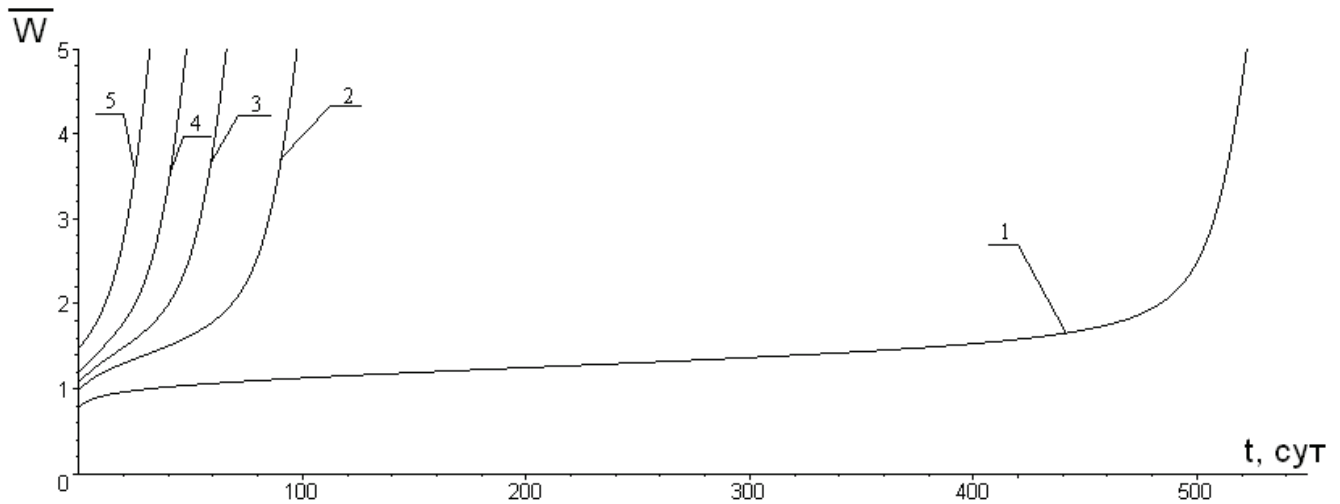
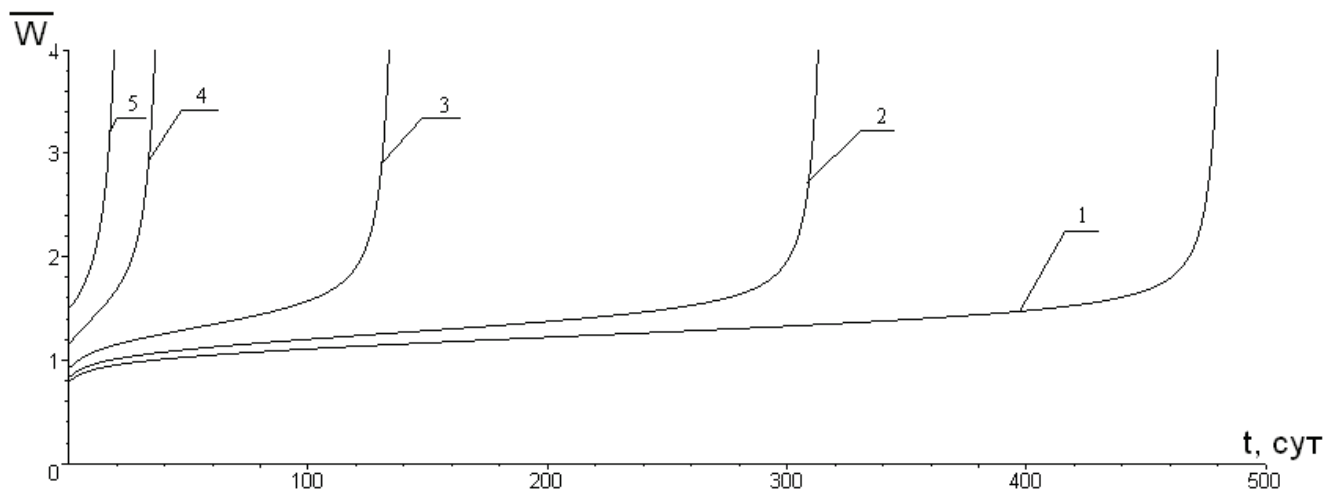


Рисунок 4. Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(\pm 0,25; \pm 0,25)$  – время  $t$ » для гладкой оболочки варианта IV. Кривые 1 – 5 отвечают значениям нагрузок  $\bar{P} = 55000$ ,  $\bar{P} = 60000$ ,  $\bar{P} = 68000$ ,  $\bar{P} = 70000$  и  $\bar{P} = 71000$  соответственно

На рис. 5 и 6 представлены аналогичные зависимости « $\bar{W}(0,0) - t$ » для ребристых оболочек варианта III (центральных их точек).



**Рисунок 5.** Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(0;0)$  – время наблюдения  $t$ » для ребристой оболочки варианта III с 6 ребрами. Кривые 1–5 отвечают значениям нагрузки  $\bar{P} = 10500$ ,  $\bar{P} = 12000$ ,  $\bar{P} = 12500$ ,  $\bar{P} = 13000$  и  $\bar{P} = 13700$  соответственно



**Рисунок 6.** Зависимости «безразмерный прогиб  $\bar{W}(0;0)$  – время  $t$ » для ребристой оболочки варианта III, подкрепленной 18 ребрами. Кривые 1–5 соответствуют нагрузкам  $\bar{P} = 15000$ ,  $\bar{P} = 16000$ ,  $\bar{P} = 17000$ ,  $\bar{P} = 19000$  и  $\bar{P} = 20200$  соответственно

Так, для указанной оболочки с 6 ребрами (рис. 5) кривые 1–5 отвечают значениям нагрузки  $\bar{P} = 10500$ ,  $\bar{P} = 12000$ ,  $\bar{P} = 12500$ ,  $\bar{P} = 13000$  и  $\bar{P} = 13700$  соответственно.

Для такой же оболочки, но подкрепленной 18 ребрами (рис. 6), кривые 1 – 5 соответствуют нагрузкам  $\bar{P} = 15500$ ,  $\bar{P} = 16000$ ,  $\bar{P} = 17000$ ,  $\bar{P} = 19000$  и  $\bar{P} = 20200$  соответственно.

Проанализируем процесс развития ползучести в материале оболочки на примере изменения функций прогиба  $\bar{W}$  и интенсивности напряжений  $\bar{\sigma}_i$  и дадим ему нижеследующую графическую интерпретацию.

Рассмотрим гладкую оболочку варианта I.

В табл. 2 представлены графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  при значении нагрузки  $\bar{P} = 100$ , отвечающие моментам времени  $t = 0, 100, 300, 500$  и  $600$  сут. Из рассмотрения графиков видно, что характер распределения прогибов и интенсивностей напряжения при указанной (сравнительно небольшой) нагрузке с течением времени практически не меняется. Следовательно, можно считать, что при данной начальной нагрузке ползучесть в материале рассматриваемой оболочки не проявляется.

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках



Таблица 2. Графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке  $\bar{P} = 100$ )

$\bar{P} = 100$	Функции прогиба $\bar{W}$	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 100$		
$t = 300$		
$t = 500$		
$t = 600$		

Таблица 3. Графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке  $\bar{P} = 160$ )

$\bar{P} = 160$	Функции прогиба $\bar{W}$	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 50$		
$t = 100$		
$t = 150$		
$t = 160$		

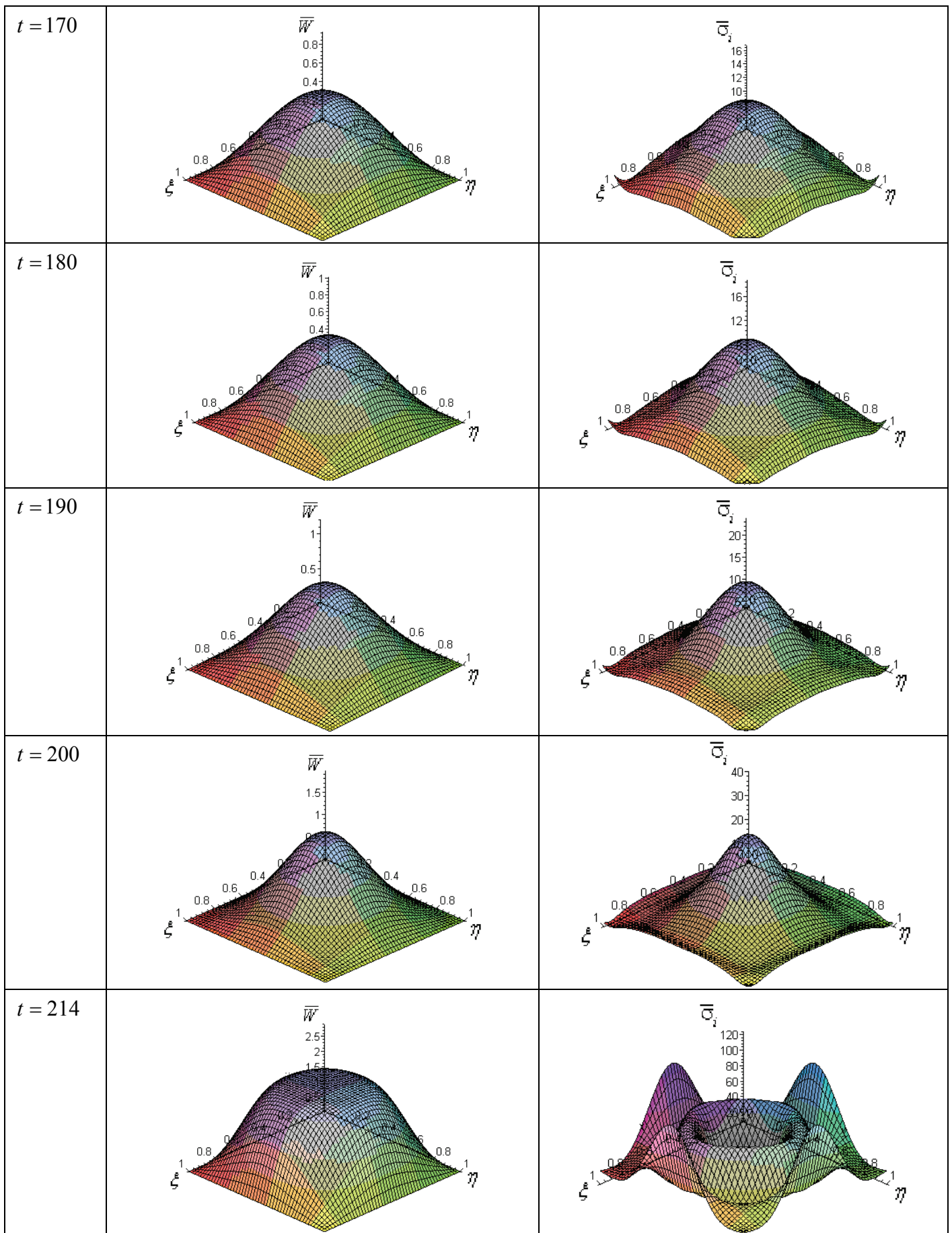




Таблица 4. Графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  для гладкой оболочки варианта I (при нагрузке  $\bar{P} = 185$ )

$\bar{P} = 185$	Функции прогиба $\bar{W}$	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 10$		
$t = 15$		
$t = 20$		
$t = 25$		
$t = 35$		

В табл. 3 и 4 приведены аналогичные графики для той же оболочки при значениях предварительной нагрузки  $\bar{P} = 160$  ( $t = 0, 50, 100, 150, 160, 170, 180, 190, 200$  и  $214$  сум.) и  $\bar{P} = 185$  ( $t = 10, 15, 20, 25, 35, 50, 70, 90, 108$  и  $115$  сум.), близких к критическому значению ( $\bar{P}_{кр} = 202$ ).

Жгутов В.М. Устойчивость ребристых оболочек при длительных нагрузках

В этих случаях мы видим, что характер распределения прогибов и интенсивностей напряжения с течением времени достаточно быстро меняется, причем прогибы сильнее растут в тех местах, где имели место максимальные напряжения. Уровень напряжений при  $t$ , близком к  $t_{кр}$ , достигает предельно высокого уровня главным образом вблизи контура оболочки.

Таблица 5. Графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  для гладкой оболочки варианта II (при нагрузке  $\bar{P} = 4500$ )

$\bar{P} = 4500$	Функции прогиба $\bar{W}$	Функции интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 50$		
$t = 70$		
$t = 90$		
$t = 108$		
$t = 115$		

Таблица 6. Графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_i$  для ребристой оболочки варианта II с 18 ребрами (при нагрузке  $\bar{P} = 17000$ )

$\bar{P} = 17000$	Функция прогибов $\bar{W}$	Функция интенсивности напряжений $\bar{\sigma}_i$
$t = 0$		
$t = 50$		
$t = 120$		
$t = 130$		
$t = 140$		



В табл. 5 и 6 приведены графики  $\bar{W}$  и  $\bar{\sigma}_t$  для гладкой и подкрепленной 18 ребрами оболочки варианта II. Значения достаточно большой нагрузки принимались равными  $\bar{P} = 4500$  ( $t = 50, 70, 90, 108$  и  $115$  см.) (табл. 5) и, соответственно,  $\bar{P} = 17000$  ( $t = 0, 50, 120, 130$  и  $140$  см.) (табл. 6).

Результаты исследования показывают, что при длительности (достаточно большой) нагрузки порядка 100–150 суток критические нагрузки могут снизиться примерно вдвое.

Заметим, что при исследовании устойчивости оболочек весьма важно осуществлять и контроль их прочности с помощью, например, критерия Мизеса (применимого для пластичных материалов) или Кулона-Мора (применимого для хрупких материалов), исходя из определенного коэффициента запаса прочности.

Таким образом, проанализирован и наглядно представлен характер развития ползучести в материале оболочки со временем (показаны изменения прогибов и интенсивности напряжения по полю оболочки), позволяющий получить зависимости снижения критической нагрузки для различных оболочек из железобетона, находящихся под действием долго длящихся нагрузок.

Получаемые в результате вычислительных экспериментов данные позволят для каждого данного вида оболочки посредством рационального выбора их конструктивных параметров (толщины, кривизны, жесткости подкреплений и т.п.) проектировать заведомо прочные и устойчиво работающие оболочечные железобетонные конструкции.

Предлагаемая методика оценки прочности и устойчивости упомянутых конструкций может найти отражение в инструктивной литературе.

### Литература

1. Безухов Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М. : Высшая школа, 1968. – 512 с.
2. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. – М. : Машиностроение, 1968. – 400 с.
3. Климанов В. И., Тимашев С. А. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек. – Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. – 291 с.
4. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие / Карпов В. В., Игнатьев О. В., Сальников А. Ю. – М. : АСВ; СПб. : СПбГАСУ, 2002. – 420 с.
5. Жгутов В. М., Карпов В. В. Анализ развития деформаций ползучести в материале пологих оболочек при длительном нагружении // XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды: Международная конференция: Материалы международной конференции. Саратов, 27 августа – 1 сентября 2007 г., Саратов. гос. ун-т / Под ред. акад. Н.Ф. Морозова. – Саратов : Изд-во Саратов. гос. ун-та, 2007. С. 121-124.
6. Жгутов В. М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17: Санкт-Петербург, 2004. –177 с.
7. Жгутов В.М. Математические модели и алгоритмы исследования устойчивости пологих ребристых оболочек при учете различных свойств материала // Изв. Орловского гос. техн. ун-та. Сер. «Строительство, транспорт». – 2007.– № 4.– С. 20-23.
8. Жгутов В. М. Исследование прочности и устойчивости ребристых оболочек с помощью вычислительного эксперимента // Проблемы прочности материалов и сооружений на транспорте: Сборник докладов VII Международной конференции по проблемам прочности материалов и сооружений на транспорте 23-24 апреля 2008 года. – СПб. : Петербургский государственный университет путей сообщения, 2008. С.110-131.
9. Жгутов В. М. Математическая модель и алгоритм исследования прочности и устойчивости ребристых оболочек с учетом различных свойств материала // «Инженерные системы – 2008»: Всероссийская научно-практическая конференция: Труды конференции. Москва, 7-11 апреля 2008 года, РУДН. – М. : Изд-во РУДН, 2008. С. 341-346.
10. Жгутов В. М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009.– №7. С. 46-54.
11. Жгутов В. М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале пологих ребристых оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – №1. С. 4-12.
12. Жгутов В. М. Математические модели, алгоритм исследования и анализ устойчивости ребристых оболочек с учетом ползучести материала при конечных прогибах // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Серия «Физико-математические науки». – 2010.– № 2.

*\*Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург  
Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc\_kitez@mail.ru*