

Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины

К.т.н. В.М. Жгутов*;

ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Оболочки как элементы строительных конструкций широко применяются в различных областях техники. Например, в промышленном и гражданском строительстве это покрытия и перекрытия большепролетных сооружений (цирки, рынки, вокзалы, складские помещения и ангары), различного рода пандусы, навесы и козырьки. В подвижном составе железнодорожного транспорта – это кузова локомотивов, вагонов, цистерны.

Зачастую тонкостенная часть оболочки (далее – тонкая оболочка) подкрепляется ребрами жесткости в одном или двух направлениях, а также имеет разнообразные отверстия, утолщения, вырезы.

Весьма существенно, что в тонких оболочках образуются прогибы, соизмеримые с толщиной самой оболочки, даже под воздействием нагрузок, далеких от критических значений.

Исследование работы таких оболочек, содержащих ребра, накладки и вырезы (далее – оболочки ступенчато-переменной толщины), представляет значительный интерес при проектировании соответствующих конструкций.

Важнейшей задачей при этом является исследование нелинейного колебательного процесса указанных конструкций.

Примечание 1. Несмотря на практически неисчерпаемое многообразие геометрических форм оболочек, самостоятельный интерес представляют так называемые *пологие* оболочки. Пологая оболочка в известном смысле мало отклоняется от своей касательной плоскости в любой ее точке. Геометрия такой оболочки близка к геометрии плоскости (касательной или плоскости, на которую она опирается). С достаточно большой общностью можно утверждать, что при локальном рассмотрении все оболочки пологие.

Большинство работ, посвященных исследованию колебательного процесса оболочек, выполнено в линейной постановке. Ребра задавались по линиям, без учета влияния сдвиговой и крутильной жесткостей ребер на напряженно-деформированное состояние (НДС) всей конструкции. К числу таких работ можно отнести публикации В.А. Заруцкого и И.Я. Амиро [1].

Геометрически нелинейные решения приведены в работах С.А. Тимашева и В.И. Климанова [2], но ребра также задавались по линиям. В экспериментах, проведенных С.А.Тимашевым, выявлено весьма существенное влияние сдвиговой и крутильной жесткостей ребер на НДС всей конструкции.

В работах А.С. Вольмира [3] исследованы нелинейные свободные колебания пологих гладких и подкрепленных ребрами оболочек посредством «размазывания» жесткостей ребер по поверхности оболочки. При этом А.С. Вольмир рассматривал оболочку как систему с одной степенью свободы (имела место одночленная аппроксимация прогиба), что позволяло вывести аналитическую зависимость амплитуды от частоты колебаний, которая в этом случае представляет собой параболу. Но такая зависимость не отражает истинный колебательный процесс оболочки.

Следует отметить также работы В.А. Гордона, В.В. Карпова, В.И. Колчунова, В.И. Коробко и И.Н. Серпика в этой области.

Анализ публикаций по теме работы позволяет поставить следующие задачи.

1. Разработать более совершенную модель колебаний оболочек ступенчато-переменной толщины, учитывающую сдвиговую и крутильную жесткости ребер.
2. Разработать методику исследования нелинейных свободных колебаний пологих оболочек, рассматривая их как системы с n степенями свободы.
3. Провести исследования колебательных процессов оболочек и получить основные характеристики колебательного процесса.

Постановка задачи

Рассматриваем прямоугольные в плане пологие оболочки. Приняв срединную поверхность оболочки (обшивки) толщиной h за отсчетную поверхность, координатные линии x и y направим по линиям кривизны, а ось z - вдоль внутренней нормали отсчетной поверхности.

Жгутов В.М. Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины

Оболочка находится под действием поперечной нагрузки $q = q(x, y, t)$, зависящей не только от внутренних координат x и y , но и от времени t (рис. 1).

Деформации удлинения $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ вдоль линий x, y и сдвига γ_{xy} в срединной поверхности оболочки связаны с перемещениями соотношениями [4, 5].

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - k_x W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial V}{\partial y} - k_y W + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)^2;$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial x} \cdot \frac{\partial W}{\partial y},$$

где $U = U(x, y, t), V = V(x, y, t)$ и $W = W(x, y, t)$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки вдоль линий x, y и оси z ; $k_x = 1/R_1, k_y = 1/R_2$ – главные кривизны (R_1, R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль линий x и y .

Высота и расположение ребер заданы с помощью функции $H = H(x, y)$ [4, 6]:

$$H(x, y) = \sum_{j=1}^m h2^j \bar{\delta}(x - x_j) + \sum_{i=1}^n h1^i \bar{\delta}(y - y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m h^{ij} \bar{\delta}(x - x_j) \bar{\delta}(y - y_i) \quad (1)$$

Здесь $h2^j, h1^i$ – высоты ребер, расставленных вдоль координатных линий x и y ; $h^{ij} = \min\{h2^j, h1^i\}$; $\bar{\delta}(x - x_j), \bar{\delta}(y - y_i)$ – единичные ступенчатые функции, равные по определению единице в местах присоединения ребер и нулю – вне этих мест.

Таким образом, толщина всей конструкции равна $h + H$. Если $H > 0$, то оболочка подкреплена ребрами (накладками); если $H < 0$, то она ослаблена вырезами.

Будем рассматривать сначала модель, не учитывающую поперечные сдвиги (модель Кирхгофа-Лява). Деформации в слое, отстоящем на величину z от срединной поверхности оболочки, в этом случае имеют вид [4-6]:

$$\varepsilon_x^z = \varepsilon_x - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y^z = \varepsilon_y - z \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy}^z = \gamma_{xy} - 2z \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

Напряжения, действующие в произвольной точке оболочки, выполненной из упругого изотропного материала, в соответствии с законом Гука вычисляются по формулам [4-6]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x^z + \mu \varepsilon_y^z); \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y^z + \mu \varepsilon_x^z); \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy}^z \quad (3)$$

Здесь E и μ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки.

Проинтегрируем напряжения (3) по z (в пределах от $-h/2$ до $h/2 + H$). Получим погонные усилия и моменты (внутренние силовые факторы), приведенные к срединной поверхности оболочки (обшивки), которые, в силу эксцентричного подкрепления оболочки ребрами, удобно представить в следующем виде [6]:

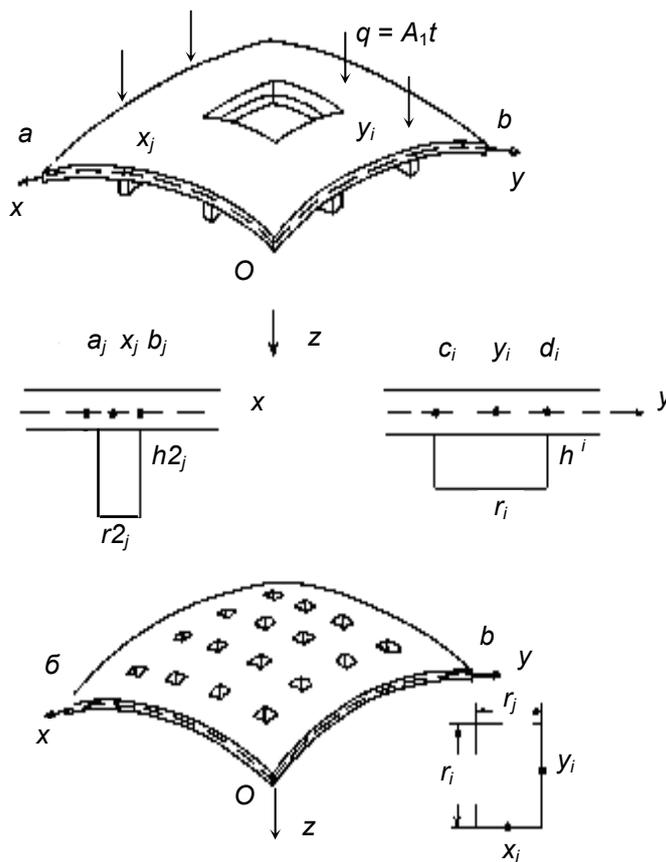


Рисунок 1. Оболочки ступенчато-переменной толщины:
а) подкрепленные ребрами;
б) ослабленные вырезами

$$N_x = N_x^S + N_x^R, N_y = N_y^S + N_y^R, N_{xy} = N_{xy}^S + N_{xy}^R;$$

$$M_x = M_x^S + M_x^R, M_y = M_y^S + M_y^R, M_{xy} = M_{xy}^S + M_{xy}^R,$$

где индексом « S » отмечены составляющие силовых факторов, действующие в обшивке оболочки, а индексом « R » – составляющие силовых факторов, действующие в ее ребрах.

Непосредственно проверяется, что усилия и моменты, действующие в обшивке и ребрах, вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} N_x^S &= \frac{E}{1-\mu^2} [h(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y)]; N_x^R = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{F}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \bar{S} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]; \\ N_y^S &= \frac{E}{1-\mu^2} [h(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x)]; N_y^R = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{F}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \bar{S} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right]; \\ M_x^S &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]; M_x^R = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{S}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) - \bar{J} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \right]; \\ M_y^S &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[\frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right]; M_y^R = \frac{E}{1-\mu^2} \left[\bar{S}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) - \bar{J} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \right]; (4) \\ N_{xy}^S &= \frac{E}{2(1+\mu)} h\gamma_{xy}; N_{xy}^R = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\bar{F}\gamma_{xy} - 2\bar{S} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]; \\ M_{xy}^S &= \frac{E}{2(1+\mu)} \cdot \frac{h^3}{6} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; M_{xy}^R = \frac{E}{2(1+\mu)} \left[\bar{S}\gamma_{xy} - 2\bar{J} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right]. \end{aligned}$$

Здесь \bar{F} , \bar{S} , \bar{J} – погонные площадь поперечного (или продольного) сечения ребра, статический момент и момент инерции данного сечения:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz; \quad \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz; \quad \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz.$$

В развернутом виде величины \bar{F} , \bar{S} , \bar{J} с учетом (1) можно записать так [6]:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \sum_{j=1}^m F2^j \bar{\delta}(x-x_j) + \sum_{i=1}^n F1^i \bar{\delta}(y-y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m F^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i); \\ \bar{S} &= \sum_{j=1}^m S2^j \bar{\delta}(x-x_j) + \sum_{i=1}^n S1^i \bar{\delta}(y-y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m S^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i); \\ \bar{J} &= \sum_{j=1}^m J2^j \bar{\delta}(x-x_j) + \sum_{i=1}^n J1^i \bar{\delta}(y-y_i) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m J^{ij} \bar{\delta}(x-x_j) \bar{\delta}(y-y_i), \end{aligned}$$

где, например, $F2^j = h2^j$; $S2^j = \frac{h2^j(h+h2^j)}{2}$; $J2^j = \frac{1}{4}h^2h2^j + \frac{1}{2}h(h2^j)^2 + \frac{1}{3}(h2^j)^3$.

Аналогичный вид имеют выражения $F1^i$, $S1^i$, $J1^i$ и F^{ij} , S^{ij} , J^{ij} .

Считаем, что материалы обшивки и ребер имеют одинаковые (или близкие) сдвиговые жесткости.

С помощью вариационного метода получены уравнения колебательного движения упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины (в случае модели Кирхгофа – Лява), являющиеся частным случаем уравнений движения ребристых оболочек общего вида [7-9]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - \rho(h + \bar{F}) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0;$$

$$N_x k_x + N_y k_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial W}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \underline{q - \rho (h + \bar{F}) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}} = 0. \quad (5)$$

Здесь $\rho = \gamma / g$, где γ и g – удельный вес материала оболочки и ускорение свободного падения.

Начальные и краевые условия считаем заданными [7-9].

Уравнения (5) учитывают геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер (или вырезов), их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости ребер, взаимное влияние ребер в местах их пересечений, т.е. наиболее полно учитывают специфику ребристых оболочек. Как частный случай из них следуют известные уравнения движения пологих оболочек.

Подчеркнутые в уравнениях (5) члены являются инерционными (даламберовыми) членами.

Получены также уравнения движения для пологих оболочек ступенчато-переменной толщины с учетом поперечных сдвигов (модель Тимошенко–Рейсснера) и инерции вращения [7, 8].

Уравнения движения выведены также в перемещениях и в безразмерных параметрах [7, 8].

Примечание 2. В работе В.М. Жгутова [4] показано, что в случае использования модели Кирхгофа–Лява (не учитывающей поперечные сдвиги) в задачах динамики оболочек эффект инерции вращения учитывать нельзя. В противном случае оказываются некорректными соответствующие краевые условия [4, 8].

В случае модели Кирхгофа–Лява безразмерные параметры имеют вид:

- безразмерные координаты $\xi = x/a, \eta = y/b, \lambda = a/b$;
- безразмерные перемещения $\bar{U} = aU/h^2, \bar{V} = bV/h^2, \bar{W} = W/h$;
- безразмерные кривизны $k_\xi = a^2 k_x/h, k_\eta = b^2 k_y/h$;
- безразмерная нагрузка $\bar{P} = a^4 q/Eh^4$;
- безразмерное время $\bar{t} = h/a^2 \sqrt{\frac{E}{(1-\mu)^2 \rho}} t$.

Здесь a и b – линейные размеры оболочки вдоль координатных линий x и y .

Методика решения

Методика решения предложенных уравнений движения состоит в последовательном применении к исходной системе (5) метода Власова–Канторовича при аппроксимации перемещений в виде (6)

$$\bar{U} = \sum_{I=1}^N T1(I)U1(I); \quad \bar{V} = \sum_{I=1}^N T2(I)V1(I); \quad \bar{W} = \sum_{I=1}^N T3(I)W1(I), \quad (6)$$

и метода Рунге–Кутты.

В соотношениях (6) $U1, V1, W1$ – известные (аппроксимирующие) функции переменных ξ и η , удовлетворяющие заданным краевым условиям; $T1, T2, T3$ – неизвестные функции переменной \bar{t} , подлежащие определению.

В результате применения метода Власова–Канторовича получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $6N$ относительно функций $T1, T2, T3$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{I=1}^N T1''(I)AT(I, J) &= AK1(J), \\ \sum_{I=1}^N T2''(I)BT(I, J) &= AK2(J), \\ \sum_{I=1}^N T3''(I)CT(I, J) &= AK3(J), \quad J=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь

$$AK1(J) = \sum_{I=1}^N \left\{ T1(I)D1(I, J) + T2(I)D2(I, J) + T3(I) \times \left[D3(I, J) + \sum_{K=1}^N T3(K)D4(K, I, J) \right] \right\};$$

$$AK2(J) = \sum_{I=1}^N \left\{ T1(I)D5(I, J) + T2(I)D6(I, J) + T3(I) \times \left[D7(I, J) + \sum_{K=1}^N T3(K)D8(K, I, J) \right] \right\};$$

$$AK3(J) = \sum_{I=1}^N \left\{ T1(I) \left[D9(I, J) + \sum_{K=1}^N T3(K)D10(K, I, J) \right] + T2(I) \left[D11(I, J) + \sum_{K=1}^N T3(K)D12(K, I, J) \right] + T3(I) \left[D13(I, J) + \sum_{K=1}^N T3(K) \left(D14(K, I, J) + \sum_{L=1}^N T3(L)D0(L) \right) \right] \right\} + D15(J)\bar{P}.$$

Приведя систему (7) к нормальному виду, применяем для ее решения метод Рунге-Кутты. Шаг \bar{t} был принят достаточно малым во избежание срыва решения.

Методика исследования

Предложенная методика исследования нелинейных свободных колебаний при рассмотрении оболочки как системы с n степенями свободы состоит в следующем.

Известно, что в общем случае системы с n степенями свободы (т.е. когда при разложении перемещений в ряды удерживается n членов) аналитической зависимости амплитуды от частоты колебаний (в виде точной формулы) не существует.

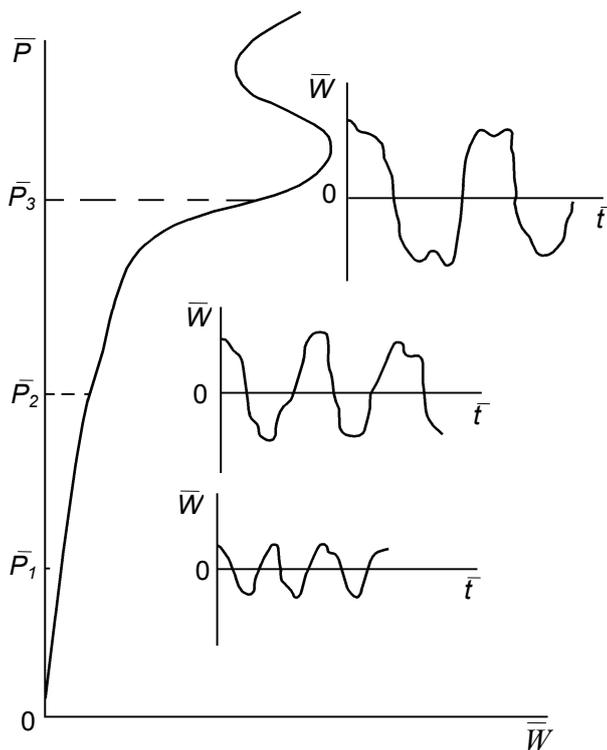


Рисунок 2. Зависимость «нагрузка \bar{P} –прогиб \bar{W} » в центре некоторой оболочки и зависимости «прогиб \bar{W} –время \bar{t} », характеризующие свободные колебания оболочки, отвечающие различным значениям нагрузки \bar{P}

Поэтому амплитудно-частотную зависимость мы получали численно.

Для этого в определенные моменты времени при фиксированных значениях нагрузки, изменяющейся с некоторым шагом, находим НДС оболочки посредством решения уравнений (7) при соответствующем значении \bar{P} . Иными словами, находим $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ и их первые производные по времени \bar{t} .

Затем нагрузка «снимается», т.е. в уравнении (7) безразмерная нагрузка \bar{P} считается равной нулю, кроме того, производные от $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ по \bar{t} также полагаются равными нулю. Однако сами $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}$ при этом принимают конкретные значения, отличные, вообще говоря, от нуля.

При таких исходных данных решается система (7), т. е. находится зависимость поперечного перемещения (прогиба) \bar{W} от времени \bar{t} .

На рис. 2 показана зависимость «нагрузка-прогиб» в центре оболочки и зависимость прогиба от времени \bar{t} , характеризующие свободные колебания оболочки при различных значениях предварительной нагрузки.

Таким образом, для каждого фиксированного значения нагрузки, изменяющейся с некоторым шагом, находится период свободных колебаний, а затем и частота, что позволяет получать численно амплитудно-частотные характеристики свободных колебаний.

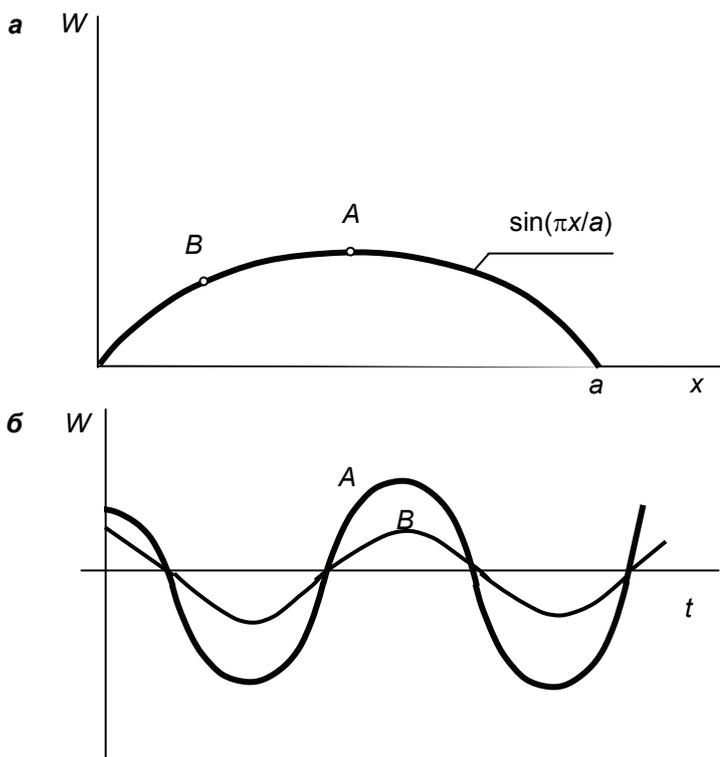


Рисунок 3. а) вид прогиба \bar{W} в направлениях координатных линий x и y отсчетной поверхности некоторой оболочки при одночленной его аппроксимации (полуволной синуса); б) виды свободных колебаний точек A (в центре) и B (в четверти) оболочки, соответствующие данной аппроксимации (гармонические колебания)

В случае одночленной аппроксимации перемещений прогиб в направлениях осей x и y имеет вид синуса (рис. 3). Поэтому свободные колебания получаются гармоническими, а частота колебаний в каждой точке оказывается одинаковой.

Для рассматриваемых оболочек форма прогиба в действительности не является синусоидальной (рис. 4). Максимум прогиба смещается в четверти. Поэтому колебательный процесс носит, как правило, негармонический характер, а частоты колебаний в разных точках оболочки являются различными.

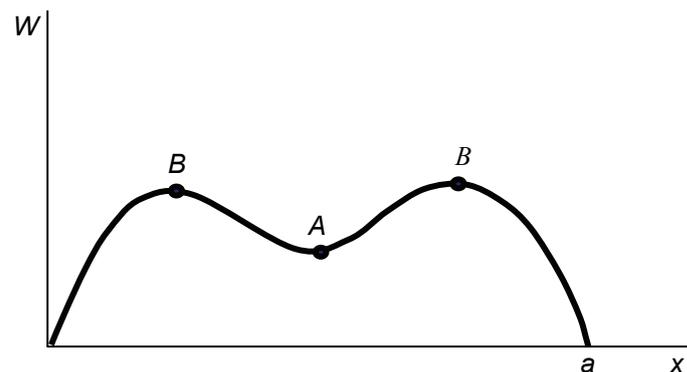


Рисунок 4. Вид прогиба \bar{W} отсчетной поверхности рассматриваемых оболочек при многочленной его аппроксимации (более реальный). Соответствующие такому прогибу свободные колебания являются ангармоническими

Как оказалось, колебательный процесс зависит не только от значения, но и от вида предварительной нагрузки (статическая или динамическая), а также скорости динамической нагрузки.

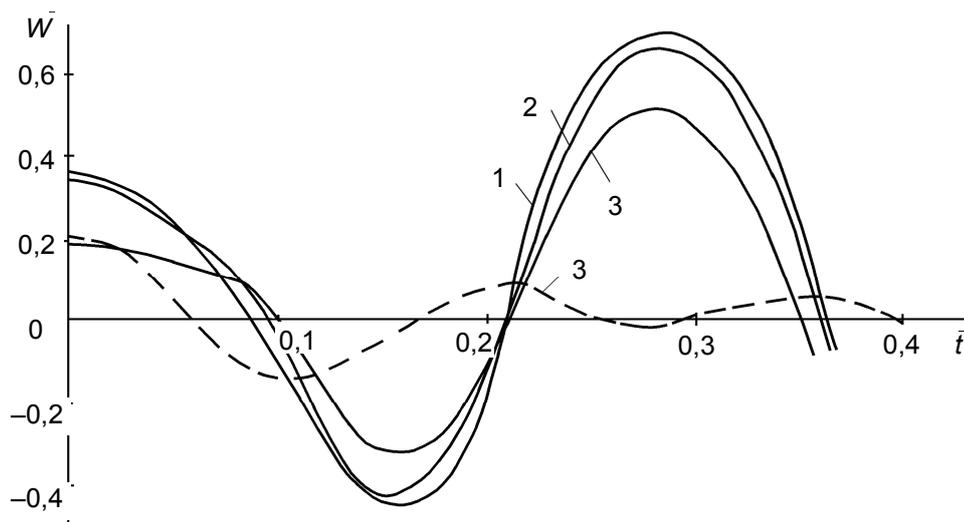


Рисунок 5. Графики «прогиб \bar{W} – время \bar{t} » для оболочек постоянной толщины с параметрами $k = 16$, $a = 60h$ при значении нагрузки $\bar{P} = 120$. Кривая 1 получена при статической нагрузке. Кривые 2 и 3 – при динамической нагрузке $\bar{P} = A \bar{t}$ ($A = 100$ для кривой 2 и $A = 1000$ для кривой 3). Кривые 1 и 2 построены для центральной точки оболочки, штриховая кривая 3 – для точки, расположенной в четверти.

На рис. 5 представлены графики «прогиб в центре оболочки \bar{W} – время \bar{t} » для оболочек постоянной толщины с параметром кривизны $k=16$ ($a=60h$), предварительно нагруженных равномерно-распределенной поперечной нагрузкой до значения $\bar{P}=120$. Кривая 1 получена при статической предварительной нагрузке. Кривые 2 и 3 – при динамической предварительной нагрузке $\bar{P}=A\bar{t}$, причем для кривой 2 $A=100$, для кривой 3 $A=1000$. Штриховая кривая 3 соответствует колебаниям точки оболочки, расположенной в четверти ($\xi, \eta=0,25$).

Так как оболочка не очень тонкая, а предварительная нагрузка далека от критической, то колебания носят гармонический характер. С увеличением скорости предварительной нагрузки амплитуда колебаний уменьшается, а частота возрастает.

При динамической предварительной нагрузке (см. штриховую кривую 3 на рис. 5) разные точки оболочки могут колебаться с разной частотой и даже в противофазе.

Примечание 3. Тот (несколько неожиданный) факт, что при большой возмущающей силе разные точки оболочки могут колебаться с разной частотой и в противофазе со всей очевидностью подтвердили колебания моста через р. Волга в Волгограде (20 мая и 22 июня 2010 года).

Все результаты в работе получены в безразмерной форме, что позволяет одним расчетом получать решения серии задач для подобных оболочек, выполненных из разных материалов (при близких значениях коэффициентов Пуассона).

Одной из важных характеристик колебательного процесса является амплитудно-частотная характеристика «амплитуда H – частота $\nu = \omega/\omega_n$ » (где ω/ω_n – частота свободных колебаний ω , приведенная к частоте линейных колебаний ω_n).

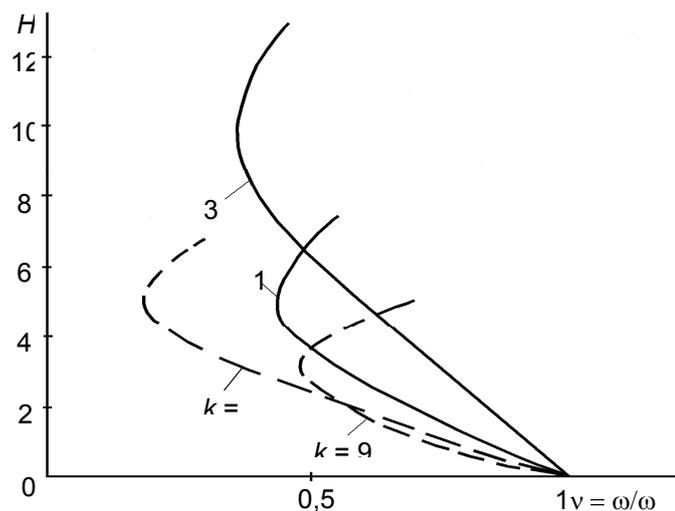


Рисунок 6. Амплитудно-частотные характеристики « $H - \nu$ » для оболочки постоянной толщины при одночленной аппроксимации прогиба \bar{W} при различных значениях кривизны оболочки k . Кривая 1 соответствует $k = 16$, кривая 3 – $k = 32$. Штриховые кривые с параметрами $k = 9$ и $k = 18$ заимствованы из работы [3].

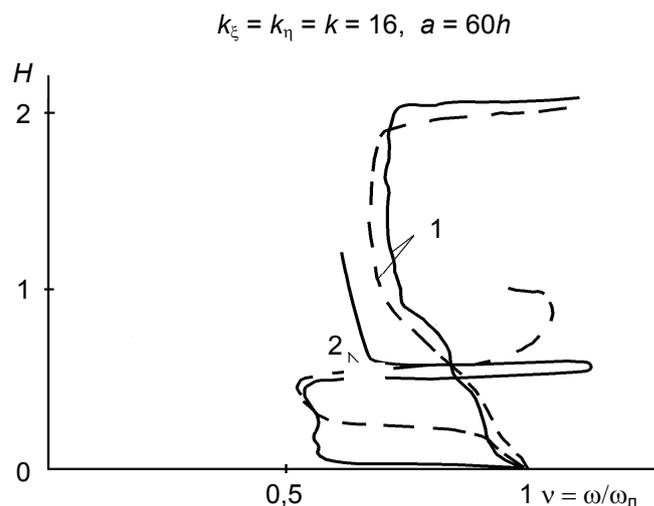


Рисунок 7. Амплитудно-частотные характеристики « $H - \nu$ » для оболочки постоянной толщины с параметрами $k = 16$, $a = 60h$ при n -членной аппроксимации прогиба \bar{W} . Кривые 1 отвечают центральной точке оболочки; кривые 2 – точке, расположенной в четверти. Сплошные кривые построены при скорости нагрузки $A = 100$, штриховые – $A = 1000$.

При одночленной аппроксимации прогиба зависимость « $H - \nu$ » имеет вид параболической кривой (рис. 6).

На данном рисунке представлены зависимости « $H - \nu$ » при различных значениях параметра кривизны $k_\xi = k_\eta = k$. Кривая 1 соответствует $k = 16$, кривая 3 – $k = 32$. Штриховые кривые заимствованы из работы А.С. Вольмира [3]. Показанные зависимости не отражают истинного процесса колебаний.

На рис. 7 представлены зависимости « $H - \nu$ » для оболочки с параметрами $k=16$, $a=60h$. Кривая 1 отвечает колебаниям центральной точки, а кривая 2 – точки, расположенной в четверти оболочки. Сплошные линии соответствуют скорости предварительной нагрузки $A=100$, штриховые – $A=1000$.

Жгутов В.М. Математическое и компьютерное моделирование нелинейных свободных колебаний упругих пологих оболочек ступенчато-переменной толщины

Как видно из рис. 7, зависимости « $H-v$ » для различных точек оболочки различны и по виду существенно отличаются от параболы, получаемой при одночленной аппроксимации перемещений.

Для более тонких оболочек это различие еще заметнее.

На рис. 8 представлены зависимости « $H-v$ » для более тонких оболочек с параметрами кривизны $k=32$ ($a=120h$). Здесь кривая 3 (рис. 8, а) соответствует колебаниям центральной точки, а кривая 4 (рис. 8, б) – точки, расположенной в четверти оболочки. Для данной оболочки по мере приближения нагрузки к критическому значению прогиб в центре уменьшается, а в четверти увеличивается. Вот почему такой сложный вид имеет кривая 3 на рис. 8, а.

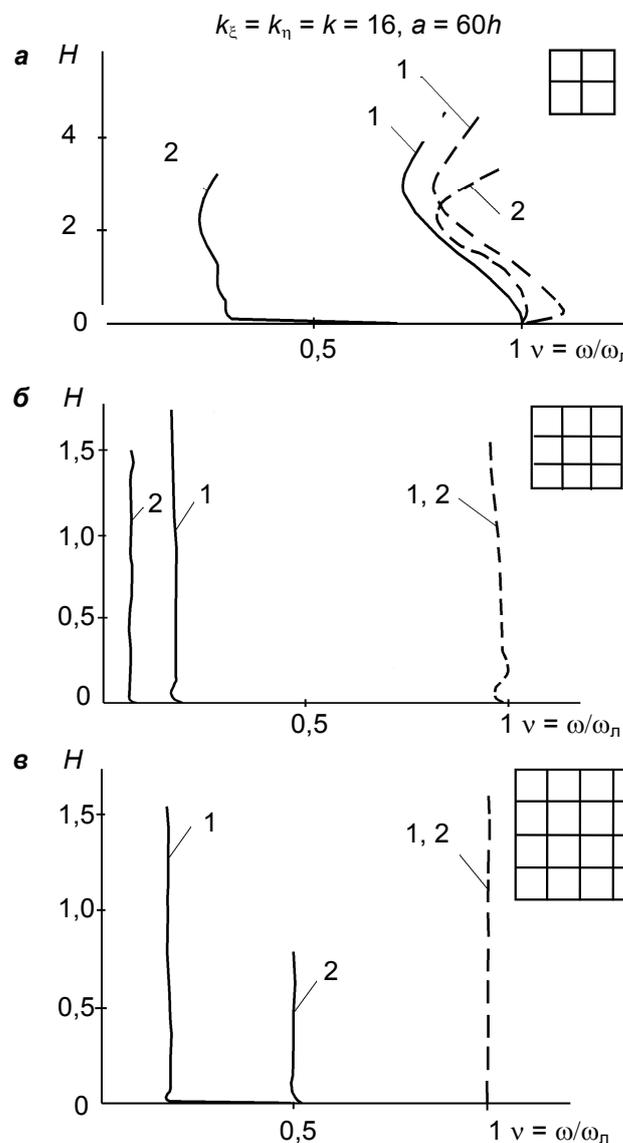
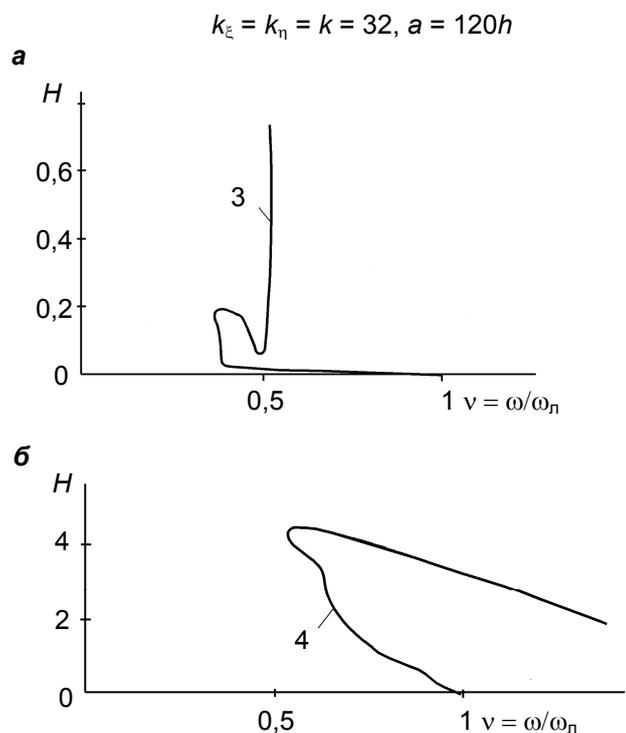


Рисунок 8. Амплитудно-частотные характеристики « $H-v$ » для оболочки постоянной толщины с параметрами $k=32$, $a=120h$ при n -членной аппроксимации прогиба \bar{W} . Кривая 3 соответствует центральной точке; кривая 4 – точке, расположенной в четверти оболочки

Рисунок 10. Амплитудно-частотные характеристики « $H-v$ » для ребристой оболочки с параметрами $k=16$, $a=60h$: а) с 2 ребрами; б) с 4 ребрами; в) с 6 ребрами подкрепления. Штриховыми линиями показаны зависимости для приведенной частоты колебаний

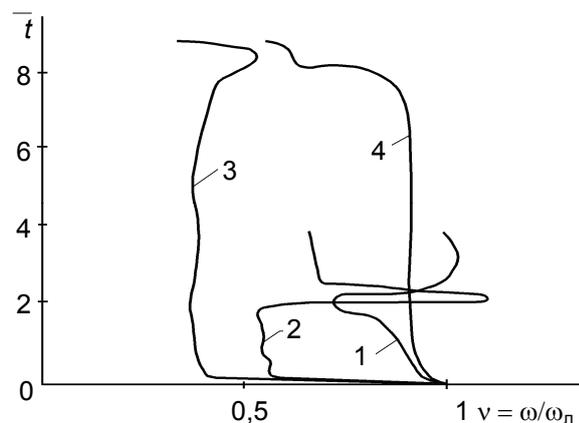


Рисунок 9. Зависимости приведенной частоты ν от времени \bar{t} приложения нагрузки для оболочек с параметрами $k=16$, $a=60h$ и $k=32$, $a=120h$. Номера кривых имеют тот же смысл, что на рис. 7 и 8

Как видно из рассмотрения рис. 7 и 8, зависимости « $H-v$ », получаемые при многочленной аппроксимации перемещений, реагируют на момент потери устойчивости оболочки. В этот момент или резко возрастает частота колебаний, или (см. кривую 3 на рис. 8, а) резко изменяется амплитуда.

Кроме зависимости « $H-v$ » интерес может представлять зависимость « $\bar{t}-v$ », которая показана на рис. 9. Номера кривых имеют тот же смысл, что и на рис. 7 и 8. Эта зависимость более наглядно характеризует процесс изменения частоты колебаний от времени приложения предварительной нагрузки.

Рассмотрим теперь оболочки, подкрепленные различным числом ребер высотой $3h$ и шириной $2h$.

Для оболочек с параметрами $k=16$, $a=60h$, подкрепленных 2, 4 и 6 ребрами, амплитудно-частотные характеристики показаны на рис. 10. Штриховыми линиями показаны зависимости для приведенной частоты колебаний.

Мы видим, что в случае подкрепления оболочки 2 ребрами зависимость « $H-v$ » для центральной точки A (точки пересечения ребер) похожа на классическую, которая получается при рассмотрении оболочки как системы с одной степенью свободы. С увеличением числа ребер, подкрепляющих оболочку, частота колебаний практически не зависит от амплитуды, поскольку такие оболочки не теряют устойчивости.

Мы видим также, что амплитудно-частотная характеристика ребристых оболочек реагирует на момент потери их устойчивости, при которой частота колебаний начинает возрастать (см. рис. 10а). Если потеря устойчивости не имеет места, то амплитудно-частотная характеристика носит практически прямолинейный вид (не имеет точек перехода от возрастания к убыванию), как это и отражено на рис. 10б и 10в.

На рис. 11 представлены зависимости « $H-v$ » для случаев более тонких оболочек ($a=120h$, $k_\xi=k_\eta=k=32$), подкрепленных 2, 4 и 6 ребрами соответственно. Штриховыми линиями показаны зависимости для приведенной частоты колебаний.

Оказывается, что более тонкие оболочки теряют устойчивость при их подкреплении и 4, и 6 ребрами, и даже большим их числом. Для таких оболочек амплитудно-частотная характеристика имеет весьма специфический вид: переходит от убывания к возрастанию. А для оболочки, подкрепленной 2 ребрами, таких переходов два, поскольку данные оболочки перед общей потерей устойчивости имеют местную потерю устойчивости («прохлопываются» четыре панели между ребрами и краем оболочки).

В работе также получались зависимости частоты нелинейных свободных колебаний от значения предварительной динамической нагрузки.

На рис. 12 показаны зависимости « ω , Гц – \bar{P} » для центральной точки стальной оболочки с параметрами $k=16$, $a=60h$. Номера кривых означают здесь число подкрепляющих оболочку ребер; «0» соответствует оболочке без ребер.

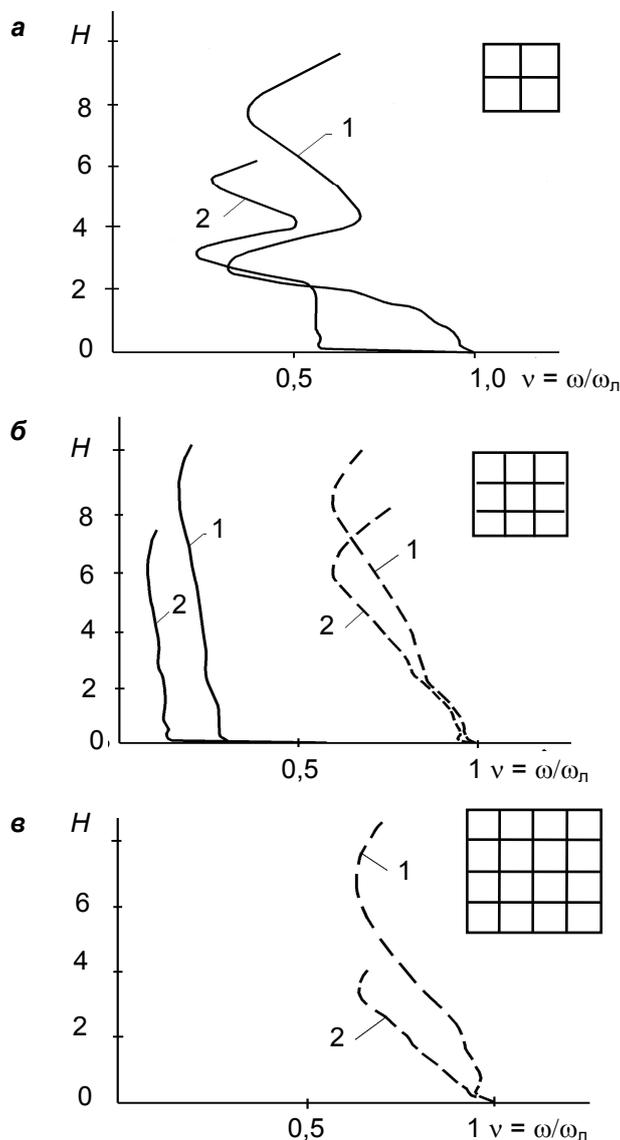


Рисунок 11. Амплитудно-частотные характеристики « $H-v$ » для ребристой оболочки с параметрами $k=32$, $a=120h$: а) с 2 ребрами; б) с 4 ребрами; в) с 6 ребрами подкрепления. Штриховыми линиями показаны зависимости для приведенной частоты колебаний

На этих зависимостях также видны моменты потери устойчивости оболочки (резкое увеличение частоты колебаний при соответствующей нагрузке).

Начиная с некоторого значения предварительной нагрузки, частота колебаний возрастает с увеличением числа ребер.

На рис. 13 приведены аналогичные результаты для более тонких стальных оболочек ($a=120h$, $k_\xi=k_\eta=k=32$).

Резкое увеличение частоты колебаний отражает потерю устойчивости. Для кривой 2 таких моментов два: поскольку оболочка перед общей потерей устойчивости имеет местную потерю – «прохлопываются» панели между ребрами и контуром оболочки.

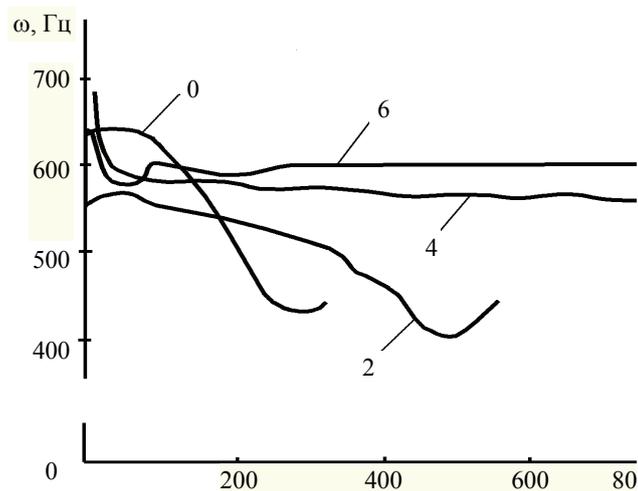


Рисунок 12. Зависимость частоты колебаний ω , Гц от значения предварительной нагрузки \bar{P} для стальной ребристой оболочки с параметрами $k=16$, $a=60h$ (центральной точки). Номера кривых означают число подкрепляющих ребер (0 соответствует оболочке без ребер)

Для обоснования точности полученных результатов проводилось сравнение с результатами, полученными другими авторами для некоторых частных задач (рис. 14).

Так, в работе Т.В. Глухой [10] представлены зависимости « $\bar{W} - \bar{t}$ » для свободных колебаний оболочки с параметром кривизны $k_\xi=k_\eta=24$ при предварительной нагрузке $\bar{P}=1000\bar{t}$ и $\bar{P}=1000$ ($\bar{t}=1$). Эти кривые показаны на рис. 14 сплошными линиями, а полученные нами – штриховыми. Кривая 1 соответствует колебаниям центральной точки оболочки, а кривая 2 – точки, расположенной в четверти. Кривая 3 соответствует колебаниям центральной точки оболочки при предварительной нагрузке $\bar{P}=600$ ($\bar{t}=0,6$). Как видим, совпадение результатов хорошее.

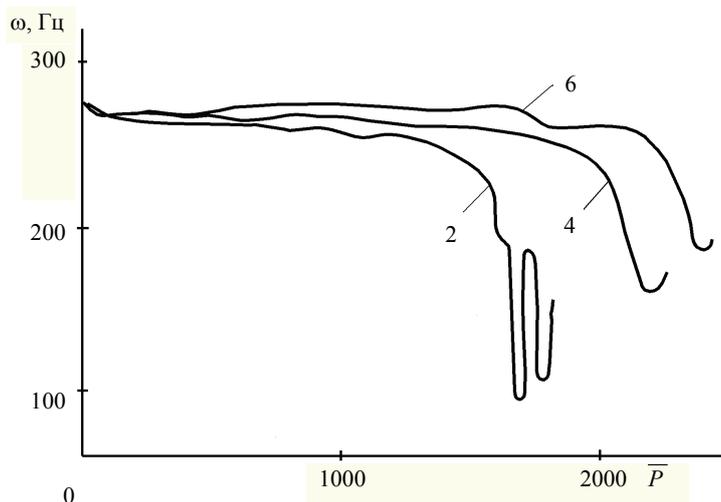


Рисунок 13. Зависимость частоты колебаний ω , Гц от значения предварительной нагрузки \bar{P} для стальной ребристой оболочки с параметрами $k=32$, $a=120h$ (центральной точки). Номера кривых имеют тот же смысл, что на рис. 12

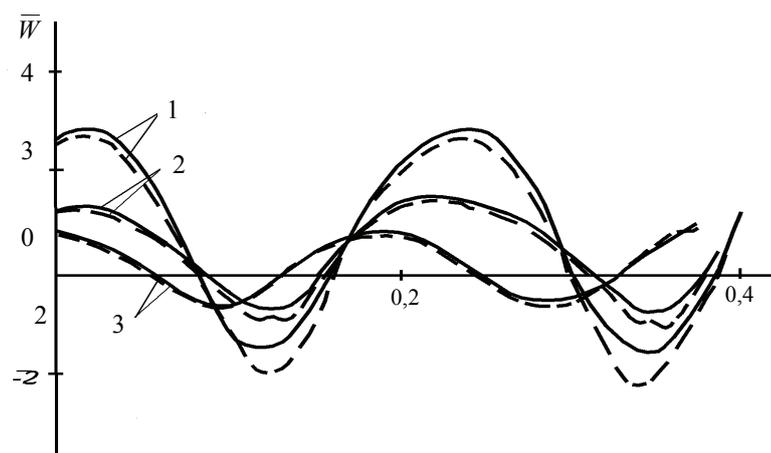


Рисунок 14. Сравнение полученных результатов с результатами других авторов

Выводы

1. Получены нелинейные уравнения движения оболочек ступенчато-переменной толщины (в случае модели Кирхгофа–Лява). В этих уравнениях учитываются геометрическая нелинейность, дискретное расположение ребер и вырезов, сдвиговая и крутильная жесткости ребер. Предложенные уравнения позволяют исследовать оболочки, находящиеся под действием как динамических, так и ударных нагрузок.
2. Разработана и реализована в виде программы на ЭВМ методика определения амплитудно-частотной характеристики нелинейных свободных колебаний для оболочки, рассматриваемой как система с n степенями свободы.
3. Амплитудно-частотная характеристика нелинейных свободных колебаний оболочки « $H-v$ », построенная при рассмотрении оболочки как системы с n степенями свободы, зависит от данной точки на оболочке, скорости возмущающей силы, параметров оболочки (линейных размеров, толщины, кривизны), жесткости ребер и их числа. Эта зависимость имеет сложный вид, весьма далекий от параболы, получаемой при одночленной аппроксимации перемещений. При потере устойчивости наблюдается экстремум по оси H .
4. Зависимость частоты нелинейных свободных колебаний от значения возмущающей силы реагирует на момент потери устойчивости оболочки резким увеличением частоты колебаний. Эта зависимость различна для разных точек оболочки.

С увеличением числа подкрепляющих оболочку ребер частота нелинейных свободных колебаний возрастает (исключением является лишь начальный мало длящийся по времени возмущающий импульс).

Литература

1. Амиро И. Я. Методы расчета оболочек. В 2 т. Т.2. Теория ребристых оболочек / И.Я. Амиро, В.А. Заруцкий. – Киев : Наук. думка, 1980. 368 с.
2. Климанов В. И. Нелинейные задачи подкрепленных оболочек / В.И. Климанов, С.А. Тимашев. – Свердловск : УНЦ АН СССР, 1985. 291 с.
3. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек / А.С. Вольмир. – М. : Наука, 1972. 432 с.
4. Жгутов В. М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17: защищена 29.04.04 / Жгутов Владимир Михайлович. – СПб, 2004. 177 с.
5. Жгутов В. М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I [Электронный ресурс] // Инженерно-строительный журнал. 2009. № 7. URL: http://www.engstroy.spb.ru/index_2009_07/zhgoutov1.html.
6. Жгутов В. М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек. [Электронный ресурс] // Инженерно-строительный журнал. 2009. №8. URL: http://www.engstroy.spb.ru/index_2009_08/zhgoutov1.html.
7. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения равновесия ребристых оболочек с учетом различных свойств материала [Электронный ресурс] // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2. URL: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_01/zhgoutov1.html.
8. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. II [Электронный ресурс] // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 2. URL: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_02/zhgoutov2.html.
9. Жгутов В. М. Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I [Электронный ресурс] // Инженерно-строительный журнал. 2010. № 1. URL: http://www.engstroy.spb.ru/index_2010_02/zhgoutov2.html.
10. Глухова Т. В. Устойчивость гибких пологих ребристых оболочек при динамическом нагружении: автореф. дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17. – Л. : ЛИСИ, 1989. 22 с.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург
Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitez@mail.ru*