Нелинейные уравнения движения ребристых оболочек с учетом различных свойств материала. I

К.т.н. В.М. Жгутов*,
ООО «Архитектурно-строительная компания «Китеж»

Оболочки обладают практически неисчерпаемым разнообразием геометрических форм и высокой несущей способностью (при относительно небольшой материалоемкости), а потому как элементы разного рода конструкций находят широкое применение в технике и строительстве.

Для придания большей жесткости тонкостенная часть оболочки зачастую подкрепляется ребрами (или накладками), что существенно повышает ее прочность при незначительном увеличении массы конструкции. По технологическим причинам оболочки могут иметь вырезы, которые в ряде случаев также подкрепляются ребрами.

Таким образом, в одной конструкции могут быть и ребра, и вырезы; следовательно, всю конструкцию необходимо рассматривать как оболочку ступенчато-переменной толщины (или ребристую оболочку).

Указанные конструкции могут подвергаться не только статическим, но и динамическим нагрузкам, допуская прогибы, соизмеримые с толщиной оболочки.

Расчеты на прочность, колебания и устойчивость таких конструкций играют важную роль при проектировании современных аппаратов, машин и сооружений. Тем не менее, поведение тонкостенных конструкций, содержащих ребра (накладки или вырезы), с учетом дискретности расположения ребер, их сдвиговой и крутильной жесткостей, поперечных сдвигов, геометрической и физической нелинейностей, возможности развития деформации ползучести при длительных нагрузках, исследовано недостаточно. Причины тому – сложность совместного учета всех упомянутых факторов и необходимость решения громоздких нелинейных краевых задач.

В процессе деформирования в зависимости от уровня и длительности внешних воздействий могут проявиться различные свойства материала конструкции: упругость, пластичность, ползучесть и т.д. Проявление пластичности или ползучести приводит к необратимым последствиям. Для того чтобы конструкция являлась заведомо прочной и устойчивой, необходимо исключить возможность проявления этих свойств.

В свете изложенного актуальными и важными представляются задачи разработки более совершенных моделей деформирования ребристых оболочек и соответствующих им алгоритмов их исследования, а также анализа прочности и устойчивости ребристых оболочек при учете различных свойств материала.

Исследование свободных нелинейных колебаний оболочек проводилось В.М. Жгутовым в работе [1]. Автором были получены уравнения (колебательного) движения упругих изотропных пологих оболочек при учете геометрической нелинейности, дискретного расположения ребер, их ширины, сдвиговой и крутильной жесткости, а также эффекта поперечных сдвигов и инерции вращения.

В настоящей работе предпринята попытка обобщения и развития предложенных автором математических моделей на случаи оболочек общего вида и при учете различных свойств материала.

Рассматриваем оболочки общего вида с краем (пологие на прямоугольном плане и вращения, в частности, цилиндрические, конические, сферические, торообразные, а также некоторые другие оболочки).

Срединную поверхность оболочки (точнее, ее обшивки) толщиной h принимаем за отсчетную поверхность $z=0$. Оси x и y криволинейной ортогональной системы координат ($-a \le x \le a$ и $-b \le y \le b$) направляем по линиям кривизны отсчетной поверхности, а ось z – по внутренней нормали поверхности $z=0$ так, чтобы система координат x, y, z была правой. (Полагаем, что определенная таким образом сеть координатных линий на отсчетной поверхности не имеет особенностей).

С внутренней стороны оболочка подкреплена ребрами жесткости, расставленными вдоль координатных линий.

Ребра (или вырезы) задаем дискретно с помощью функции $H = H(x, y)$, характеризующей распределение ребер (вырезов) по оболочке, их ширину и высоту [1,2,3]. Таким образом, толщина всей конструкции равна $h+H$ и $-h/2 \le z \le h/2 + H$. (Если $H>0$, то оболочка подкреплена ребрами (или накладками), если же $H<0$, то она ослаблена вырезами).

Считаем, что оболочка находится под действием динамической механической нагрузки при определенном закреплении ее края (контура).

Будем учитывать геометрическую нелинейность, дискретное расположение ребер, их ширину, сдвиговую и крутильную жесткости, эффект поперечных сдвигов и инерции вращения, а также возможные нелинейную упругость и ползучесть материала оболочки.

1. Геометрические соотношения в срединной поверхности $z=0$ получаются с помощью ковариантного дифференцирования векторного поля перемещений и с учетом геометрической нелинейности имеют вид

$$\varepsilon_x=\frac{1}{A}\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}V-K_xW+\frac{1}{2}\theta_1^2;\ \varepsilon_y=\frac{1}{B}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}U-K_yW+\frac{1}{2}\theta_2^2;$$

$$\gamma_{xy}=\frac{1}{A}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial U}{\partial y}-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}U+\frac{\partial B}{\partial x}V\right)+\theta_1\theta_2, \quad (1)$$

где ε_x, ε_y и γ_{xy} – деформации удлинения вдоль осей x, y и сдвига в касательной плоскости (dx, dy); U, V и W – компоненты вектора перемещений точек вдоль осей x, y и z соответственно; A и B – метрические коэффициенты Ламе, зависящие от вида оболочки (например, $A=B=1$ для пологой оболочки и $A=const$, $B=B(x)$ в случае оболочки вращения); $K_x=1/R_1$ и $K_y=1/R_2$ – главные кривизны (R_1 и R_2 – главные радиусы кривизны) оболочки вдоль осей x и y соответственно; $\theta_1=-\left(\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}+K_xU\right)$; $\theta_2=-\left(\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}+K_yV\right)$.

Деформации поперечных сдвигов определяем по формулам

$$\gamma_{xz}=cf(z)(\psi_x-\theta_1);\ \gamma_{yz}=cf(z)(\psi_y-\theta_2), \quad (2)$$

где φ_x и φ_y – углы поворота отрезка нормали в плоскостях (dx, dz) и (dy, dz) соответственно; $f(z)$ – функция, характеризующая распределение напряжений τ_{xz} и τ_{yz} вдоль оси z [1,3]; c – константа.

Перемещения и деформаций в слое $z\neq 0$ вычисляем по формулам [1,3]

$$U^z=U+z\psi_x,\ V^z=V+z\psi_y,\ W^z=W;$$

$$\varepsilon_x^z=\varepsilon_x+z\chi_1,\ \varepsilon_y^z=\varepsilon_y+z\chi_2,\ \gamma_{xy}^z=\gamma_{xy}+2z\chi_{12},$$

где $\chi_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_x}{\partial x}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial y}\psi_y$; $\chi_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial x}\psi_x$; $2\chi_{12}=\frac{1}{A}\frac{\partial\psi_y}{\partial x}+\frac{1}{B}\frac{\partial\psi_x}{\partial y}-\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial y}\psi_x+\frac{\partial B}{\partial x}\psi_y\right)$

суть функции изменении кривизны и кручения.

2. Физические соотношения в произвольной точке оболочки, выполненной из линейно упругого ортотропного материала, в соответствии с обобщенным законом Гука имеют вид [4]

$$\sigma_x=G_1[\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y+z(\chi_1+\mu_2\chi_2)],\ \sigma_y=G_2[\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x+z(\chi_2+\mu_1\chi_1)];\tau_{xy}=G_{12}[\gamma_{xy}+2z\chi_{12}] \quad (3)$$
$$\tau_{xz}=G_{13}\gamma_{xz}=G_{13}kf(z)(\psi_x-\theta_1);\ \tau_{yz}=G_{23}\gamma_{yz}=G_{23}kf(z)(\psi_y-\theta_2),$$

где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – продольные модули Юнга и коэффициенты Пуассона данного материала, причем $E_1\mu_2=E_2\mu_1$; G_{12}, G_{13} и G_{23} – модули сдвига соответственно в плоскостях симметрии (dx, dy), (dx, dz) и (dy, dz) материала оболочки.

В случае изотропного линейно упругого материала физические соотношения являются частным случаем соотношений (3) при $E_1=E_2=E$ и $\mu_1=\mu_2=\mu$, а также $G_{12}=G_{13}=G_{23}=G=E/2(1+\mu)$.

Интегрируя напряжения из (3) по z в пределах от $-h/2$ до $h/2+H$, получаем погонные усилия, моменты и поперечные силы, приведенные к отсчетной поверхности [4]:

$$N_x=G_1[(h+\bar F)(\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y)+\bar S(\chi_1+\mu_2\chi_2)],\ N_y=G_2[(h+\bar F)(\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x)+\bar S(\chi_2+\mu_1\chi_1)],$$
$$N_{xy}=G_{12}[(h+\bar F)\gamma_{xy}+2\bar S\chi_{12}];$$

$$M_x=G_1\left[\bar S(\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y)+\left(\frac{h^3}{12}+\bar J\right)(\chi_1+\mu_2\chi_2)\right],\ M_y=G_2\left[\bar S(\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x)+\left(\frac{h^3}{12}+\bar J\right)(\chi_2+\mu_1\chi_1)\right],$$

$$M_{xy} = G_{12}\left[\bar{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_x = kG_{13}(h+\bar{F})(\psi_x - \theta_1),\ Q_y = kG_{23}(h+\bar{F})(\psi_y - \theta_2). \quad (4)$$

Здесь $\bar{F},\ \bar{S},\ \bar{J}$ – площадь поперечного (продольного) сечения ребра, приходящаяся на единицу длины сечения, статический момент и момент инерции данного сечения соответственно:

$$\bar{F} = \int_{h/2}^{h/2+H} dz\,,\ \bar{S} = \int_{h/2}^{h/2+H} z dz\,,\ \bar{J} = \int_{h/2}^{h/2+H} z^2 dz\,;$$

$$G_1 = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}\,,\ G_2 = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}\,.$$

Физические соотношения для ортотропных материалов при учете ползучести материала в соответствии с теориями упругоползучего тела могут быть представлены в виде [5]

$$\sigma_x = \sigma_x^e - \sigma_x^c,\ \sigma_y = \sigma_y^e - \sigma_y^c,\ \tau_{xy} = \tau_{xy}^e - \tau_{xy}^c,$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xz}^e - \tau_{xz}^c,\ \tau_{yz} = \tau_{zy}^e - \tau_{zy}^c,$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие напряжений (отмечены индексом «*е*»), определяются с помощью формул

$$\sigma_x^{\mathrm{e}} = G_1(\varepsilon_x^z + \mu_2\varepsilon_y^z),\ \sigma_y^{\mathrm{e}} = G_2(\varepsilon_y^z + \mu_1\varepsilon_x^z),\ \tau_{xy}^{\mathrm{e}} = G_{12}\gamma_{xy}^z;$$

$$\tau_{xz}^{\mathrm{e}} = G_{13}\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\mathrm{e}} = G_{23}\gamma_{yz}, \quad (5)$$

а составляющие, обусловленные ползучестью материала (отмечены индексом «*с*»), вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_x^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_1(\varepsilon_x^z + \mu_2\varepsilon_y^z)R_1(t,\tau)d\tau\,,\sigma_y^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_2(\varepsilon_y^z + \mu_1\varepsilon_x^z)R_1(t,\tau)d\tau\,,\tau_{xy}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{12}\gamma_{xy}^z R_2(t,\tau)d\tau\,;$$

$$\tau_{xz}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{13}\gamma_{xz}R_2(t,\tau)d\tau,\ \tau_{yz}^{\mathrm{c}} = \int_{t_0}^{t} G_{23}\gamma_{yz}R_2(t,\tau)d\tau\,. \quad (6)$$

Здесь $R_1(t,\tau)$ и $R_2(t,\tau)$ – функции влияния материала при растяжении (сжатии) и сдвиге, где t – время, τ – переменная интегрирования (имеет смысл времени);

$G_1 = \dfrac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}$, $G_1 = \dfrac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}$, G_{12}, G_{13} и G_{23} – модули сдвига [константы либо переменные коэффициенты (функции t) в общем случае], где E_1, E_2 и μ_1, μ_2 – продольные модули упругости и коэффициенты Пуассона (переменные либо константы).

Для изотропных материалов физические соотношения являются частным случаем соотношений (5) и (6) при $E_1 = E_2 = E$ и $\mu_1 = \mu_2 = \mu$, а также $G_1 = G_2 = E/(1-\mu^2)$, $G_{12} = G_{13} = G_{23} = G = E/2(1+\mu)$ [6,7].

Интегрируя напряжения (5) и (6) по *z* в пределах от –*h*/2 до *h*/2 + *H*, получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [5]:

$$N_x = N_x^{\mathrm{e}} - N_x^{\mathrm{c}},\ N_y = N_y^{\mathrm{e}} - N_y^{\mathrm{c}},\ N_{xy} = N_{xy}^{\mathrm{e}} - N_{xy}^{\mathrm{c}};\ M_x = M_x^{\mathrm{e}} - M_x^{\mathrm{c}},\ M_y = M_y^{\mathrm{e}} - M_y^{\mathrm{c}},\ M_{xy} = M_{xy}^{\mathrm{e}} - M_{xy}^{\mathrm{c}};$$

$$Q_x = Q_x^{\mathrm{e}} - Q_x^{\mathrm{c}},\ Q_y = Q_y^{\mathrm{e}} - Q_y^{\mathrm{c}}, \quad (7)$$

где упругомгновенные (в частности, упругие) составляющие (с индексом «*е*») вычисляются по формулам

$$N_x^e(t) = G_1\left[(h+\bar{F})(\varepsilon_x + \mu_2\varepsilon_y) + \bar{S}(\chi_1 + \mu_2\chi_2)\right];$$

$$N_y^e(t) = G_2\left[(h+\bar{F})(\varepsilon_y + \mu_1\varepsilon_x) + \bar{S}(\chi_2 + \mu_1\chi_1)\right];$$

$$N_{xy}^e(t) = G_{12}\left[(h+\bar{F})\gamma_{xy} + 2\bar{S}\chi_{12}\right].$$

$$M_x^e(t)=G_1\left[\bar{S}(\varepsilon_x+\mu_2\varepsilon_y)+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)(\chi_1+\mu_2\chi_2)\right];$$

$$M_y^e(t)=G_2\left[\bar{S}(\varepsilon_y+\mu_1\varepsilon_x)+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)(\chi_2+\mu_1\chi_1)\right];$$

$$M_{xy}^e(t)=G_{12}\left[\bar{S}\gamma_{xy}+2\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\chi_{12}\right];$$

$$Q_x^e(t)=kG_{13}(h+\bar{F})(\psi_x-\theta_1);\ Q_y^e(t)=kG_{23}(h+\bar{F})(\psi_y-\theta_2),$$

а составляющие внутренних силовых факторов, обусловленные ползучестью материала (с индексом «*c*»), определяются с помощью выражений

$$N_x^c=\int_{t_0}^{t}N_x^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\ N_y^c=\int_{t_0}^{t}N_y^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$N_{xy}^c=\int_{t_0}^{t}N_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\ M_x^c=\int_{t_0}^{t}M_x^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;$$

$$M_y^c=\int_{t_0}^{t}M_y^e(\tau)R_1(t,\tau)d\tau;\ M_{xy}^c=\int_{t_0}^{t}M_{xy}^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;$$

$$Q_x^c(t)=\int_{t_0}^{t}Q_x^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau;\ Q_y^c=\int_{t_0}^{t}Q_y^e(\tau)R_2(t,\tau)d\tau.$$

Примечание. При решении задач ползучести интегралы по переменной τ разбиваем на сумму интегралов по частичным отрезкам $[t_{i-1},t]$ заданной длины $\Delta t=t_i-t_{i-1}$ каждый. Указанные интегралы вычисляем приближенно по формуле прямоугольников [6,7].

В соответствии с деформационной теорией пластичности физические соотношения для нелинейно-упругого изотропного материала имеют вид [8–12]

$$\sigma_x=\sigma_x^{\text{e}}-\sigma_x^{\text{p}},\ \sigma_y=\sigma_y^{\text{e}}-\sigma_y^{\text{p}},\ \tau_{xy}=\tau_{xy}^{\text{e}}-\tau_{xy}^{\text{p}},$$

$$\tau_{xz}=\tau_{xz}^{\text{e}}-\tau_{xz}^{\text{p}},\ \tau_{yz}=\tau_{yz}^{\text{e}}-\tau_{yz}^{\text{p}},$$

где линейно упругие составляющие (отмечены индексом «*е*») определяются с помощью известных формул

$$\sigma_x^{\text{e}}=G_1(\varepsilon_x^z+\mu\varepsilon_y^z),\ \sigma_y^{\text{e}}=G_2(\varepsilon_y^z+\mu\varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy}^{\text{e}}=G_{12}\gamma_{xy}^z,\ \tau_{xz}^{\text{e}}=G_{13}\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\text{e}}=G_{23}\gamma_{yz},\ (8)$$

являющихся частным случаем соотношений (3) при $G_1=G_2=E/(1-\mu^2)$ и $G_{12}=G_{13}=G_{23}=E/2(1-\mu)$, а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (отмечены индексом «*р*») вычисляются с помощью соотношений

$$\sigma_x^{\text{p}}=G_1m\varepsilon_i^2(\varepsilon_x^z+\mu\varepsilon_y^z),\ \sigma_y^{\text{p}}=G_2m\varepsilon_i^2(\varepsilon_y^z+\mu\varepsilon_x^z);$$

$$\tau_{xy}^{\text{p}}=G_{12}m\varepsilon_i^2\gamma_{xy}^z,\ \tau_{xz}^{\text{p}}=G_{13}m\varepsilon_i^2\gamma_{xz},\ \tau_{yz}^{\text{p}}=G_{23}m\varepsilon_i^2\gamma_{yz},\ (9)$$

где $\varepsilon_i=\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{(\varepsilon_x^z)^2+\varepsilon_x^z\varepsilon_y^z+(\varepsilon_y^z)^2+\frac{1}{4}[(\gamma_{xy}^z)^2+\gamma_{xz}^2+\gamma_{yz}^2]}$ – интенсивность деформации [5].

Интегрируя напряжения (8) и (9) по *z* в пределах от –*h*/2 до *h*/2 + *H* получим выражения для погонных усилий, моментов и поперечных сил (приведенных к отсчетной поверхности) в следующем виде [8 – 11]:

$$N_x=N_x^{\text{e}}-N_x^{\text{p}},\ N_y=N_y^{\text{e}}-N_y^{\text{p}},\ N_{xy}=N_{xy}^{\text{e}}-N_{xy}^{\text{p}},$$

$$M_x=M_x^{\text{e}}-M_x^{\text{p}},\ M_y=M_y^{\text{e}}-M_y^{\text{p}},\ M_{xy}=M_{xy}^{\text{e}}-M_{xy}^{\text{p}}$$

$$Q_x=Q_x^{\text{e}}-Q_x^{\text{p}},\ Q_y=Q_y^{\text{e}}-Q_y^{\text{p}},\ (10)$$

где линейно упругие составляющие (с индексом «*e*») вычисляются по формулам

$$N_x^e = G_1[(h+\overline{F})(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \overline{S}(\chi_1 + \mu\chi_2)];$$
$$N_y^e = G_2[(h+\overline{F})(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \overline{S}(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$
$$N_{xy}^e = G_{12}[(h+\overline{F})\gamma_{xy} + 2\overline{S}\chi_{12}];$$
$$M_x^e = G_1\left[\overline{S}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_1 + \mu\chi_2)\right]; \quad (11)$$
$$M_y^e = G_2\left[\overline{S}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + \left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)(\chi_2 + \mu\chi_1)\right];$$
$$M_{xy}^e = G_{12}\left[\overline{S}\gamma_{xy} + 2\left(\frac{h^3}{12} + \overline{J}\right)\chi_{12}\right],$$
$$Q_x^e = kG_{13}(h+\overline{F})(\psi_x - \theta_1);\; Q_y^e = kG_{23}(h+\overline{F})(\psi_y - \theta_2),$$

а нелинейно-упругие (упругопластические) составляющие (с индексом «*p*») внутренних силовых факторов определяются с помощью выражений

$$N_x^p = G_1[I_1(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_2(\chi_1 + \mu\chi_2)];$$
$$N_y^p = G_2[I_1(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_2(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$
$$N_{xy}^p = G_{12}(I_1\gamma_{xy} + 2I_2\chi_{12});$$
$$M_x^p = G_1[I_2(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) + I_3(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \quad (12)$$
$$M_y^p = G_2[I_2(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) + I_3(\chi_2 + \mu\chi_1)];$$
$$M_{xy}^p = G_{12}(I_2\gamma_{xy} + 2I_3\chi_{12});$$
$$Q_x^p = G_{13}kI_4(\psi_x - \theta_1);\; Q_y^p = G_{23}kI_4(\psi_y - \theta_2).$$

В соотношениях (12) $I_s = m\int\limits_{-h/2}^{h/2+H}\varepsilon_i^2 z^{s-1}dz,\; 1 \le s \le 3;\; I_4 = m\int\limits_{-h/2}^{h/2+H}\varepsilon_i^2 f(z)dz$ – жесткостные параметры.

3. Рассмотрим процесс движения на промежутке времени [t_0, t_1]. В соответствии с фундаментальным принципом наименьшего действия (в форме Гамильтона – Остроградского) истинные траектории движения точек системы для данного промежутка времени должны доставлять стационарное значение величине (действию) [1]

$$I = \int\limits_{t_0}^{t_1}(K - \Pi + A^E)dt, \quad (11)$$

где K и Π – кинетическая и потенциальная энергия системы соответственно; A^E – работа внешних сил.

Математически принцип наименьшего действия в этом случае выражается в виде вариационного уравнения

$$\delta I = \delta\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(K - \Pi + A^E\right)dt = 0, \quad (12)$$

где δ – символ (изохронной) вариации.

Здесь

$$K = \frac{\rho}{2}\iiint\limits_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial U^z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial V^z}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial W^z}{\partial t}\right)^2\right]d\Omega \quad (13)$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\iiint_{\Omega} [\sigma_x \varepsilon_x^z + \sigma_y \varepsilon_y^z + \tau_{xy}\gamma_{xy}^z + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}]d\Omega, \quad (14)$$

$$A^E = \iint_S (P_x U + P_y V + qW)dS, \quad (15)$$

где $\rho = \gamma / g$ (γ –удельный вес материала оболочки, g – ускорение силы тяжести); P_x, P_y и q – компоненты внешней механической нагрузки в направлении координатных линий x, y и оси z; Ω – область в пространстве (x, y, z); S – область в плоскости (x, y); $d\Omega$ и dS – дифференциалы объема и отсчетной поверхности данной оболочки соответственно ($d\Omega = ABdxdydz$; $dS = ABdxdy$).

Проинтегрировав по *z* ($-h/2 \le z \le h/2 + H$) выражения (13) и (14), получим

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\{N_x\varepsilon_x + N_y\varepsilon_y + N_{xy}\gamma_{xy} + M_x\chi_1 + M_y\chi_2 + 2M_{xy}\chi_{12} + Q_x(\psi_x - \theta_1) + Q_y(\psi_y - \theta_2)\}dS, \quad (16)$$

где внутренние силовые факторы (усилия, моменты и поперечные силы) вычисляются (в зависимости от учитываемых свойств материала) с помощью соотношений (4), (7) или (10), а деформации – по формулам (1) и (2);

$$K = \frac{\rho}{2}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{(h+\bar{F})(\dot{U}^2 + \dot{V}^2 + \dot{W}^2) + 2\bar{S}(\dot{U}\dot{\psi}_x + \dot{V}\dot{\psi}_y) + \left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)(\dot{\psi}_x^2 + \dot{\psi}_y^2)\right\}dS. \quad (17)$$

В соответствии с принятой в механике традиции точками здесь и далее обозначены производные по времени *t.*

Заметим, что неизвестные функции перемещений U, V, W и углов поворота нормали ψ_x, ψ_y, равно, как и воздействующие нагрузки P_x, P_y и q, зависят не только от внутренних координат x, y, но и времени *t*.

Преобразуем вариационное уравнение (12) с учетом соотношений (15), (16) и (17) так, чтобы под знаком (тройного) интеграла не было вариаций от производных функций *U*, *V*, *W*, ψ_x, ψ_y.

Будем рассматривать сначала пологие оболочки, для которых полагается, что в процессе деформирования величины $K_x U$ и $K_y V$ малы, $\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x} >> K_x U$ и $\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y} >> K_y V$, а значит $\theta_1 \approx -\frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial x}$; $\theta_2 \approx -\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial y}$, причем $A = B = 1$.

В результате с учетом принятых допущений вариационное уравнение (12) будет иметь вид

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1}\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\left\{\left[\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + P_x - \rho(h+\bar{F})\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho\bar{S}\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]\delta U + \right.$$

$$+\left[\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + P_y - \rho(h+\bar{F})\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - \rho\bar{S}\frac{\partial^2 \psi_y}{\partial t^2}\right]\delta V +$$

$$+\left[N_x K_x + N_y K_y + \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial W}{\partial x} + N_{xy}\frac{\partial W}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(N_y\frac{\partial W}{\partial y} + N_{xy}\frac{\partial W}{\partial x}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q - \rho(h+\bar{F})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}\right]\delta W +$$

$$+\left[\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - \rho\bar{S}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \rho\left(\frac{h^3}{12} + \bar{J}\right)\frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}\right]\delta\psi_x +$$

$$+\left[\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y-\rho\bar{S}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}-\rho\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right]\delta\psi_y\Bigg\}dxdydt+$$

$$+\rho\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\Bigg\{\Bigg[\left[(h+\bar{F})\frac{\partial U}{\partial t}+\bar{S}\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right]\delta U+\left[(h+\bar{F})\frac{\partial V}{\partial t}+\bar{S}\frac{\partial\psi_y}{\partial t}\right]\delta V+$$

$$+(h+\bar{F})\frac{\partial W}{\partial t}\delta W+\left[\bar{S}\frac{\partial U}{\partial t}+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\frac{\partial\psi_x}{\partial t}\right]\delta\psi_x+$$

$$+\left[\bar{S}\frac{\partial V}{\partial t}+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\frac{\partial\psi_y}{\partial t}\right]\delta\psi_y\Bigg\}\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1}dxdy-\int_{t_0}^{t_1}\int_{-b}^{b}\Bigg[N_x\delta U+N_{xy}\delta V+\Bigg(N_x\frac{\partial W}{\partial x}+$$

$$+N_{xy}\frac{\partial W}{\partial y}+Q_x\Bigg)\delta W+M_x\delta\psi_x+M_{xy}\delta\psi_y\Bigg]\Bigg|_{x=-a}^{x=a}dydt-\int_{t_0}^{t_1}\int_{-a}^{a}\Bigg[N_{xy}\delta U+N_y\delta V+\Bigg(N_y\frac{\partial W}{\partial y}+$$

$$+N_{xy}\frac{\partial W}{\partial x}+Q_y\Bigg)\delta W+M_{xy}\delta\psi_x+M_y\delta\psi_y\Bigg]\Bigg|_{y=-b}^{y=b}dxdt=0\,.\ (18)$$

Ясно, что в уравнении (18) вариации δU, δV, δW, $\delta\psi_x$, $\delta\psi_y$ следует считать произвольными. Следовательно, приравнивая нулю сомножители, стоящие перед каждой из указанных вариаций, получаем уравнения движения оболочки:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}+P_x-\rho\left[(h+\bar{F})\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}+\bar{S}\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+P_y-\rho\left[(h+\bar{F})\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\bar{S}\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$N_xK_x+N_yK_y+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial W}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial W}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_y\frac{\partial W}{\partial y}+N_{xy}\frac{\partial W}{\partial x}\right)+$$

$$+\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+q-\rho(h+\bar{F})\frac{\partial^2 W}{\partial t^2}=0;$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-\rho\left[\bar{S}\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}\right]=0;$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y-\rho\left[\bar{S}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}+\left(\frac{h^3}{12}+\bar{J}\right)\frac{\partial^2\psi_y}{\partial t^2}\right]=0;\ (19)$$

Из вариационного уравнения (18) получаем естественные краевые условия:

- при $x=-a$ и $x=a$

$N_x=0$ или $U=0$, $N_{xy}=0$ или $V=0$,

$N_x\dfrac{\partial W}{\partial x}+N_{xy}\dfrac{\partial W}{\partial y}+Q_x=0$ или $W=0$,

$M_x=0$ или $\psi_x=0$, $M_{xy}=0$ или $\psi_y=0$;

- при $y=-b$ и $y=b$

$N_{xy}=0$ или $U=0$, $N_y=0$ или $V=0$,

$N_y\dfrac{\partial W}{\partial y}+N_{xy}\dfrac{\partial W}{\partial x}+Q_y=0$ или $W=0$,

$M_{xy}=0$ или $\psi_x=0$, $M_y=0$ или $\psi_y=0$.

Из вариационного уравнения (18) получаем также и начальные условия при $t = t_0$:

$$(h+\overline{F})\frac{\partial U}{\partial t}+\overline{S}\frac{\partial \psi_x}{\partial t}=0 \text{ или } U=0;$$

$$(h+\overline{F})\frac{\partial V}{\partial t}+\overline{S}\frac{\partial \psi_y}{\partial t}=0 \text{ или } V=0;$$

$$\frac{\partial W}{\partial t}=0 \text{ или } W=0;$$

$$\overline{S}\frac{\partial U}{\partial t}+[(h^3/12)+\overline{J}]\frac{\partial \psi_x}{\partial t}=0 \text{ или } \psi_x=0;$$

$$\overline{S}\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}+[(h^3/12)+\overline{J}]\frac{\partial \psi_y}{\partial t}=0 \text{ или } \psi_y=0.$$

Полученные уравнения движения (19) пологих ортотропных и изотропных ребристых оболочек учитывают геометрическую нелинейность, дискретность расположения ребер (или вырезов), их ширину, сдвиговую и крутильную жесткость ребер, а также эффект поперечных сдвигов и инерции вращения. Кроме того, уравнения (19) позволяют учитывать нелинейную упругость, а также возможные деформации ползучести материала.

Литература

1. Жгутов В.М. Нелинейные свободные колебания пологих оболочек ступенчато-переменной толщины: Дисс. … канд. техн. наук: 05.23.17. СПб., 2004.
2. Жгутов В.М. Метод конструктивной анизотропии для ортотропных и изотропных ребристых оболочек. // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №8. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 08/zhgoutov1.html.
3. Нелинейные математические модели деформирования оболочек переменной толщины и алгоритмы их исследования: Учебное пособие // В.В. Карпов, О.В. Игнатьев, А.Ю. Сальников. М., СПб., 2002.
4. Жгутов В.М. Прочность и устойчивость упругих ортотропных и изотропных ребристых оболочек. I // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №7.– Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
5. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала // Инженерно-строительный журнал. – 2009.– №7. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 07/zhgoutov1.html.
6. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к исследованию ползучести в материале ребристых пологих оболочек // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2010. – № 1. М., 2010.
7. Жгутов В.М. Анализ различных подходов к формированию расчетных уравнений в компьютерном моделировании упруговязких ребристых оболочек // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
8. Жгутов В.М. Математическая модель деформирования нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Инженерно-строительный журнал.– 2009. – №6. – С.16–24. – Доступ в сети Интернет //http://www.engstroy.spb.ru/index 2009 06/zhgoutov.html.
9. Жгутов В.М. Математическая модель, алгоритм исследования и анализ устойчивости нелинейно-упругих ребристых оболочек при больших перемещениях // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. – 2009.–№ 4. Спб., 2009.
10. Жгутов В.М. Устойчивость ребристых пологих оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2009. – № 4.
11. Жгутов В.М. Устойчивость упругопластических ребристых оболочек при больших перемещениях // «Особенности проектирования и расчета пространственных конструкций на прочность, устойчивость и прогрессирующее разрушение»: Научная сессия МОО «Пространственные конструкции» и научного совета РААСН «Пространственные конструкции зданий и сооружений»: Сборник статей. Москва, 14 апреля 2009 года, НИИЖБ. М., 2009.
12. Жгутов В.М. Устойчивость железобетонных ребристых оболочек при учете геометрической и физической нелинейностей // Популярное бетоноведение. – 2009. – № 6. Спб., 2009.

**Владимир Михайлович Жгутов, Санкт-Петербург*

Тел. раб.: +7(812)378-20-83; эл. почта: abc_kitezh@mail.ru