Гидравлическая форма условия экстремума диссипации мощности для безнапорных потоков в призматических руслах

Д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ В.Н. Бухарцев*,
д.т.н., профессор ГОУ СПбГПУ М.Р. Петриченко

Пусть, по аналогии с «медленными» движениями вязкой жидкости, справедливо эвристическое предположение:

$$h_f \to \text{extr}_{\pm}, Q = \text{fix}, \qquad (1)$$

либо

$$Q \to \text{extr}_{\mp}, h_f = \text{fix}. \qquad (1_1)$$

Здесь $\text{extr}_{\pm}$ обозначает, например, min (max). Тогда $\text{extr}_{\mp}$ обозначает max (min). Иначе, предполагается, что ***в действительном движении с фиксированным расходом потери напора не больше (не меньше), чем в любом виртуальном движении; или, при фиксированных потерях напора расход в действительном потоке не меньше (не больше), чем в любом виртуальном***. Виртуальность потоков понимается как их кинематическая совместимость. Например, набор (Q, m, n, i, b, h') = idem в действительном и в любом допустимом движении, но при этом в действительном движении потери напора h_f минимальны (максимальны). Либо, в двойственной формулировке, (h_f, m, n, i, b, h') = idem в действительном и в любом допустимом движении, но при этом в действительном движении расход Q максимален (минимален). Здесь h' означает начальное (в сечении x=0) значение глубины потока. Но, если набор (Q, m, n, i, b h') задан, глубины потока (однозначно) определяются как решение «уравнения неравномерного движения». Будет доказано, что экстремальная формулировка (1) или (1_1) совпадает с традиционной постановкой в классе движений с медленным изменением гидравлических характеристик вдоль потока.

1. *Необходимое условие экстремума*

Пусть p, q, r, s, t – обозначения Монжа для частных производных h_f:

$$p := \frac{\partial h_f}{\partial x}, \quad q := \frac{\partial h_f}{\partial h}, \quad r := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x^2}, \quad s := \frac{\partial^2 h_f}{\partial x \partial h}, \quad t := \frac{\partial^2 h_f}{\partial h^2}.$$

В этих обозначениях из уравнения неравномерного движения следует

$$i_f = \frac{p + iNq}{1 + Nq}, \qquad N := \frac{dh}{dЭ}. \qquad (2)$$

Действительно, вдоль потока $i_f = p + \frac{dh}{dx} q = p + Nq(i - i_f)$. Остается исключить уклон трения i_f.

Вместо изопериметрических задач (1) можно поставить задачу на экстремум потерь напора на всем множестве $X \times H$ допустимых значений продольной координаты и глубин потока:

$$\int_{(X)} dx \int_{(H)} dh \frac{p + iNq}{1 + Nq} \to \text{extr}_{\pm}, \qquad (3)$$

с плотностью лагранжиана $\Lambda(p, q) := \frac{p + iNq}{1 + Nq}$.

Уравнение Лагранжа имеет вид:

$$N(1 + Nq)s + N(i - p)(Nt + N_1 q) - \frac{N_1}{2}(i - p)(1 + Nq) = 0, \quad N_1 := \frac{dN}{dh}. \qquad (4)$$

Уравнение (4) допускает решение:

$$h_f = ix + Э' - Э, \qquad (5)$$

Т.е. интеграл Бернулли является интегралом (4). Предположив, что условие (3) имеет место, получаем интеграл Бернулли (5). Иначе, условие (5) необходимо для предположения (3) о минимуме диссипации: ***для движений (потоков), обладающих условием экстремума потерь напора (3), выполняется интеграл Бернулли (5).*** Или наличие экстремума потерь напора свидетельствует о существовании интеграла энергии (5). Поэтому и движения (потоки), удовлетворяющие условию (1) или (1_1) обладают интегралом Бернулли (5).

Пример. Вдоль характеристики уравнение (4) имеет вид:

$$(i - p)\left(N^2 \frac{dq}{dh} + \frac{1}{2} N N_1 q - \frac{N_1}{2}\right) = 0, \quad (4_1)$$

откуда:

1) либо $i = p, \quad Nq + 1 = 0$,

2) либо $q = -\frac{1}{N} + \frac{C}{\sqrt{N}}, \quad p = i_f - qN(i - i_f) = (1 + Nq)i_f - qNi = i - C\sqrt{N}(i - i_f)$,

C – постоянная интегрирования.

Тогда:

$$h_f = ix - C\int_0^x \sqrt{N}(i - i_f)d\xi + C\int_{h'}^{h} \frac{d\eta}{\sqrt{N(\eta)}} - \int_{h'}^{h} \frac{d\eta}{N(\eta)} = ix - Э + Э' + C\int_0^x \sqrt{N}[dЭ(\xi) - (i - i_f)d\xi],$$

где греческими буквами обозначены переменные интегрирования. Ввиду произвольности x и N, получается, что или C=0, или $dЭ-(i-i_f)dx=0$.

2. Достаточность интеграла Бернулли для каноничности уравнения неравномерного движения

Пусть выполняется (5). Оказывается, что существование интеграла (5) приводит к условию, равносильному (1), (1_1), (3).

Интеграл (5) в виде $Э-ix+h_f=E=const$, можно рассматривать как функцию Гамильтона E(x, h) для векторного поля

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial E}{\partial h}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial x}, \quad (6)$$

или, произведя дифференцирование, получим:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{N} + q, \frac{dx}{dt} = i - p. \quad (6_1)$$

Значит, $\frac{dh}{dx} = N\frac{i - p}{1 + Nq}$. ($6_2$)

Уравнение (6_2) равносильно традиционному уравнению неравномерного движения:

$$\frac{dh}{dx} = N(i - i_f). \quad (6_3)$$

Действительно, $p = i_f - q\frac{dh}{dx}$. Остается исключить из (6_2) уклон свободной поверхности.

Получается, что интеграл Бернулли (5) **порождает** каноническую систему (6, 6_1). Содержание пунктов 1 и 2 следует нашей заметке [1].

3. Условие экстремума, связанное с системой (6_1)

Эта каноническая система связана с некоторым условием экстремума для первообразной функции (или «главной» функции по Гамильтону) $F(T,x)=\int_0^T \sup_{(h)}\left(h\frac{dx}{dt}-E\right)dt$. Выясним смысл этого условия [2].

Функция F(t, x) удовлетворяет уравнению переноса:

$$\frac{\partial F}{\partial t}+Э\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)-ix+\int_0^x i_f d\xi=0,\quad h:=\frac{\partial F}{\partial x}.\ (7)$$

Покажем, что уравнение (7) непротиворечиво: решения уравнения (7) совпадают с известными решениями, доставляемыми традиционной теорией. Ясно, что (7) – «замаскированная» запись интеграла Бернулли, если отделить переменные и положить: $\frac{\partial F}{\partial t}=-Э'$, $Э'$ – значение удельной энергии в сечении x=0. Продифференцируем (7) по x вдоль свободной поверхности h=h(x):

$$\frac{1}{N}\frac{dh}{dx}-i+i_f=0,\ .\ (8)$$

Уравнение (8) равносильно (6_3), что и требовалось доказать. Далее, легко проверяется:

$$L:=h\dot{x}-E=h\frac{dЭ}{dh}-Э'.\ (9)$$

Значит, в действительном движении $\int_{h'}^{h''}\frac{hN^{-1}-Э'}{i-i_f}dh\to extr_{\pm}$. (10)

И далее, пусть $F(0)=\left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=0}-h'=0$. Тогда:

$$F(x)=\int_0^x (x-\xi)N(i-i_f)d\xi=\int_0^x (x-\xi)\frac{dh}{d\xi}d\xi+xh'=\int_0^x h(\xi)d\xi\to extr_{\pm}.\ (10_1)$$

Условие (10) означает, что в действительном движении *площадь криволинейной трапеции, образованной вертикалями ξ=0, ξ=x, прямолинейной образующей дна и кривой свободной поверхности не больше (или не меньше), чем в любом допустимом движении, для любого конечного участка потока.* Можно показать, что *площадь трапеции минимальна у кривых подпора и максимальна у кривых спада.*

Итак, существование интеграла Бернулли для движений (потоков) означает, что такие движения обладают экстремальными свойствами по расходу и по потерям напора. Иначе говоря, *интеграл Бернулли для целого потока – критерий того, что действительное движение обладает свойствами минимума потерь напора при заданном расходе, или, что при фиксированном перепаде уровней воды действительное движение (поток) обладает максимальным расходом.* Такой результат для диссипативной системы (потока) кажется необычным. Действительно, если бы система (поток) была консервативной, то каноничность уравнений движения порождается интегралом энергии и обратно, интеграл энергии для консервативных систем с неизменяемыми (склерономными) связями прямо получается как двойственная лагранжиану функция, [2]. К счастью, гидравлическая традиция рассматривает потерю напора как позиционную функцию (или как функцию координаты потока x). Поэтому потеря напора фигурирует как (формально) консервативная составляющая интеграла энергии – такая же, например, как z(x), с одним только ограничением: $h_f(x)>0$.

Литература:

1. Бухарцев В.Н., Петриченко М.Р. Экстремальные свойства потоков, В сборнике: «Механика и процессы управления», УНЦ РАН, Миасс, 2006, с. 79…84.
2. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики, Ч.2, М., Наука, 1966, 332 с.

**Владимир Николаевич Бухарцев, Санкт-Петербургский государственный политехнический университет*

Тел. раб. 297-59-54, 297-59-88, эл. почта gts.bu@cef.spbstu.ru